

АППРОКСИМАЦИЯ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДРЕВЕСИНЫ

К.А.Вареник

APPROXIMATION OF THE WOOD DEFORMATION DIAGRAM

К.А.Varenik

Политехнический институт НовГУ, vkirilly89@mail.ru

В статье выполнены обобщения предложений различных исследователей по аппроксимации аналитическими выражениями диаграмм деформирования древесины при сжатии. Представлены результаты испытаний образцов древесины сосны на сжатие вдоль волокон. Выполнена оценка степени соответствия различных аппроксимирующих зависимостей экспериментальным диаграммам.

Ключевые слова: древесина, диаграмма, сжатие, аппроксимация, напряженно-деформированное состояние

The article summarized the proposals on the approximation of the wood compression strain diagrams by analytic expressions made by various investigators. The results of the pine wood samples testing on compression parallel to grain are presented. The degree of compliance of various approximating dependences to the experimental diagrams is assessed.

Keywords: wood, diagram, compression, approximation, stress-strain state

Введение

Важнейшая задача в совершенствовании норм проектирования деревянных конструкций — создание расчетных моделей на основе учета упруго-пластических свойств реальной древесины. В этой связи является актуальным вопрос аппроксимации работы древесины аналитическими выражениями, максимально близко описывающими физическую нелинейность материала.

Обобщения предложений по аппроксимации диаграмм деформирования древесины при сжатии

Первая форма связи (после закона Гука) между напряжениями и деформациями, как указывается в работе [1], предложена в 1729 г. Г.Б.Бюльфингером. Она представляет собой степенной закон вида:

$$\sigma = A\varepsilon^k, \quad (1)$$

где A — константа, имеющая размерность напряжений; k — показатель степени (безразмерная величина).

Постоянные A и k П.А.Лукаш [2] предложил находить исходя из равенства пределов прочности и удельных энергий деформаций, определяемых по экспериментальной диаграмме и аппроксимирующей ее зависимости.

Наибольшее распространение получила аппроксимация работы древесины при сжатии и растяжении, предложенная В.Прагером [3,4] и Ф.П.Белянкиным [5]. Принимается, что на участке от $\sigma = \sigma_p^{пч}$ до $\sigma = \sigma_c^{пч}$ зависимость $\sigma(\varepsilon)$ прямолинейна и $\sigma = E\varepsilon$ (упругая работа). Затем деформации растут от ε_c до $\varepsilon_c^{п}$ при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_c^{пч}$ (пластическая работа). Данная аппроксимация получила название идеализированной диаграммы Белянкина-Прагера (рис.1). Она использовалась в работах Ф.П.Белянкина [5,6], В.М.Коченова [7], Г.И.Дыбенко [8], В.А.Шляпина [9].

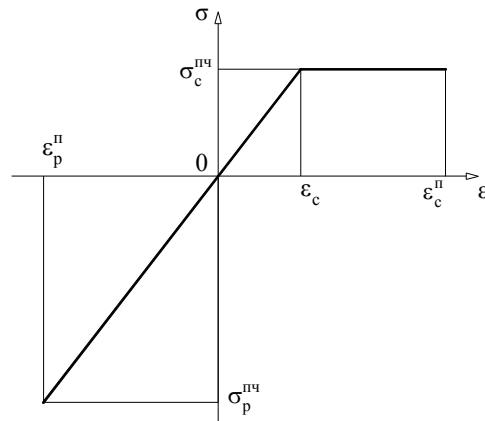


Рис.1. Диаграмма Белянкина-Прагера

По результатам экспериментальных исследований, проведенных в ЦНИПС, А.Б.Губенко [10] построена приведенная диаграмма работы сосны на сжатие вдоль волокон (рис.2). На участке диаграммы от 0 до $\varphi = 0,5$ зависимость носит линейный характер. За пределом пропорциональности, принятым равным $0,5\sigma_{вр}$, уравнение криволинейной части диаграммы получено в следующем виде

$$\varphi = 0,00203x^4 + 0,0322x^3 + 0,233x^2 + 0,889x - 0,620, \quad (2)$$

где $x = 1000\varepsilon$.

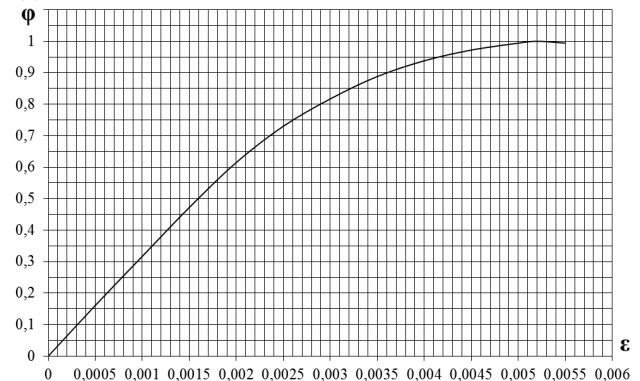


Рис.2. Приведенная диаграмма сжатия сосны А.Б.Губенко

Д.А.Кочетков [11] для участка приведенной диаграммы от $\varepsilon = 0,2\%$ до $\varepsilon = 0,5\%$ подобрал уравнение

$$\sigma = 1200\sqrt{\varepsilon - \varepsilon^2} - 280, \text{ кгс/см}^2. \quad (3)$$

В.В.Быковым [12] использован полином третьей степени

$$\varphi = A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + A_3\varepsilon^3. \quad (4)$$

Полином второй степени использован В.Г.Ленновым [13] для аппроксимации приведенной предельно низкой диаграммы сжатия вдоль волокон древесины сосны

$$\varphi = A_1\varepsilon - A_2\varepsilon^2 = 0,3394\varepsilon - 0,0462\varepsilon^2. \quad (5)$$

Уравнения квадратной параболы были использованы в работах В.В.Пинаджана [14] и А.М.Иванова [15].

П.А.Лукаш [2] и А.Юлинен [16] предложили аппроксимацию при помощи кубической параболы

$$\sigma = A_1\varepsilon - A_2\varepsilon^3. \quad (6)$$

В работе [17] указывается, что уравнение

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (7)$$

может представлять зависимость «напряжение-деформация» для всех конструкционных материалов. Г.Е.Бельский [18], используя данное уравнение и найдя по экспериментальной диаграмме сжатия древесины сосны ЦНИПС [10] значения постоянных, получил аппроксимирующее выражение в следующем виде:

$$\frac{\varepsilon}{0,0032} = \frac{\sigma}{322} + 0,719 \left(\frac{\sigma}{322} \right)^{12,07}. \quad (8)$$

И.С.Воронюк [19] задает аппроксимирующую функцию для диаграмм растяжения и сжатия древесины сосны, заимствованных из работ А.В.Губенко [10] и А.И.Рабиновича [20], следующими уравнениями:

$$\varphi = 333\varepsilon \text{ (растяжение);} \quad (9)$$

$$\varphi = 385\varepsilon - 2,14 \times 10^4 \varepsilon^{1,895} \text{ (сжатие).} \quad (10)$$

Параметры уравнения (10) подобраны из условия совпадения экспериментальных точек теоретической и опытной кривых и равенства площадей диаграмм деформаций в интервале $0 < \varepsilon < 5,5 \times 10^{-3}$.

А.Г.Рафаилов [21] предлагает систему аппроксимирующих функций:

$$\sigma = A_0 \varepsilon^{i-1} \sum_{i=1}^N A_i \lg^{i-1} \varepsilon. \quad (11)$$

Проведенные автором исследования показали, что для аппроксимации нелинейного участка диаграммы практически всех конструкционных материалов достаточно ограничиться двумя-тремя членами ряда (11), при этом отклонение от истинной кривой деформирования не превышает 1-3%.

К.П.Пятикрестовский [22] считает, что диаграмму деформирования древесины целесообразно

аппроксимировать параболической зависимостью Ф.И.Герстнера

$$\sigma = E_0\varepsilon - \frac{E_0^2}{4\sigma_{ls}}\varepsilon^2, \quad (12)$$

где σ , ε — текущие значения напряжений и относительных деформаций; E_0 — мгновенный начальный модуль деформаций; σ_{ls} — кратковременный предел прочности.

Анализ предложений по аппроксимации экспериментальных диаграмм работы древесины показывает, что в ряде случаев аналитические функции имеют существенные недостатки. Так, например, некоторые из них хорошо аппроксимируют опытные кривые лишь в определенных областях деформирования, другие вызывают трудности их использования ввиду своей сложности. Обобщений и сравнительной оценки пригодности той или иной функции для аппроксимации работы древесины не проводилось.

В работе [23] для оценки степени сглаживания между опытными данными и данными, найденными по уравнению, предлагается вычислять «корреляционное отношение»

$$\bar{\eta} = \sqrt{1 - \frac{\sum \Delta^2}{\sum \alpha^2}}, \quad (13)$$

где $\Delta = \sigma_{cp} - \sigma_{appr}$ — отклонение значений напряжений осредненной диаграммы от соответствующих (для задаваемого ε) по аппроксимирующему уравнению; $\alpha = \sigma_{cp} - M$ — центральное отклонение; $M = \frac{\sum \sigma_{cp}}{n}$ — среднее арифметическое значение напряжений по экспериментальной диаграмме.

Результаты экспериментов и аппроксимации

Для получения диаграмм сжатия древесины вдоль волокон проведены кратковременные испытания образцов в форме прямоугольной призмы с основанием 30×30 мм и длиной вдоль волокон 120 мм. Все образцы (всего 5) были выполнены из одного соснового бруска.

Испытания проводились на электромеханической универсальной испытательной машине WDW-200E с максимальной нагрузкой 200 кН и точностью измерений нагрузки и деформации $\pm 1\%$. Данная машина производит построение диаграмм в координатах «нагрузка-деформация».

Скорость перемещения подвижной траверсы испытательной машины была принята равной 4 мм/мин, при этом достижение образцом предела прочности происходит через $1,0 \pm 0,5$ мин после начала нагружения.

Температура воздуха в лаборатории была около 22°C , относительная влажность — 63%. Средняя плотность древесины при влажности в момент испытаний была $0,556 \text{ г/см}^3$. Средняя влажность образцов составила 11%.

После соответствующей обработки экспериментальных диаграмм для каждого образца была получена диаграмма в координатах «напряжения-относительные деформации» (рис.3). Все диаграммы имеют спадающий участок. Средний предел прочности древесины сосны составил 67,1 МПа.

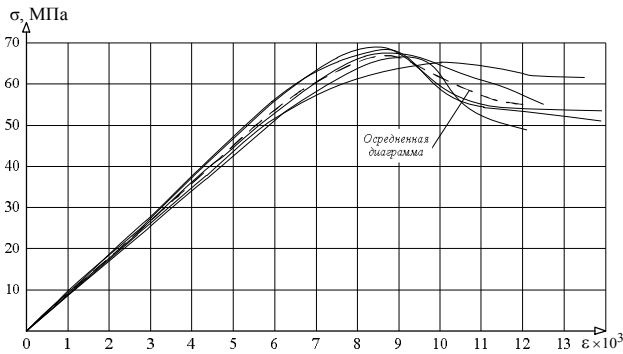


Рис.3. Экспериментальные и осредненная диаграммы сжатия сосны

На основании экспериментальных диаграмм была получена осредненная диаграмма сжатия сосны. Значения напряжений осредненной диаграммы являются средними арифметическими напряжений, найденных по исходным диаграммам, для соответствующих значений относительных деформаций.

Для аппроксимации осредненной диаграммы работы древесины на сжатие воспользуемся следующими выражениями:

$$\sigma = A_1 \varepsilon + A_2 \varepsilon^2; \quad (14)$$

$$\sigma = A_1 \varepsilon + A_3 \varepsilon^3; \quad (15)$$

$$\sigma = A_1 \varepsilon + A_2 \varepsilon^2 + A_3 \varepsilon^3. \quad (16)$$

Параметры A_1 , A_2 и A_3 легко найти при помощи метода наименьших квадратов, в соответствии с которым сумма квадратов отклонений опытных данных от вероятных средних значений найденных по аппроксимирующему уравнению, будет наименьшей.

Результаты вычисления коэффициентов и значений показателя корреляции $\bar{\eta}$ представлены в таблице.

На рис.4 представлены аппроксимирующие диаграммы, построенные по аналитическим выражениям (14)-(16), а также осредненная диаграмма.

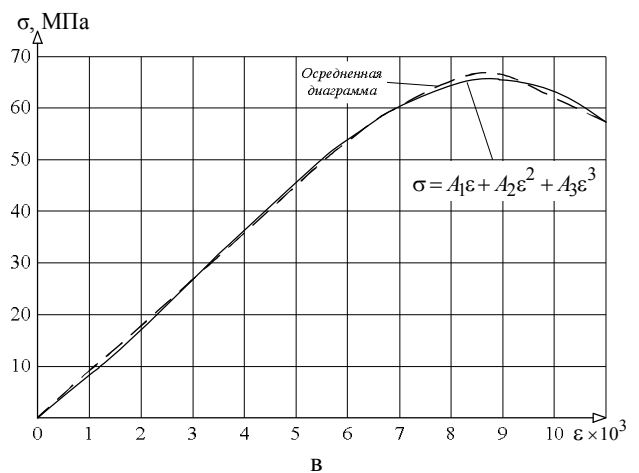
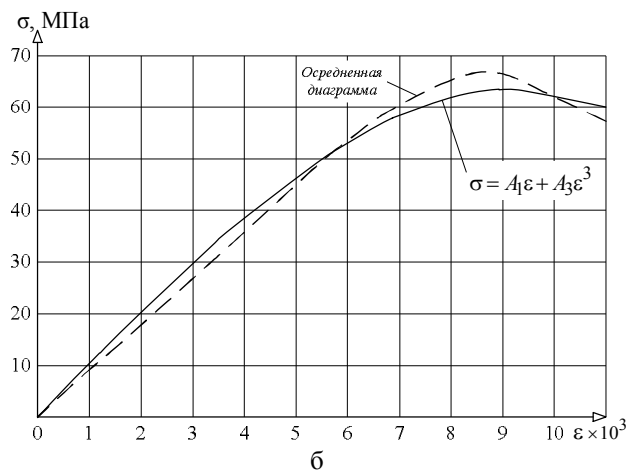
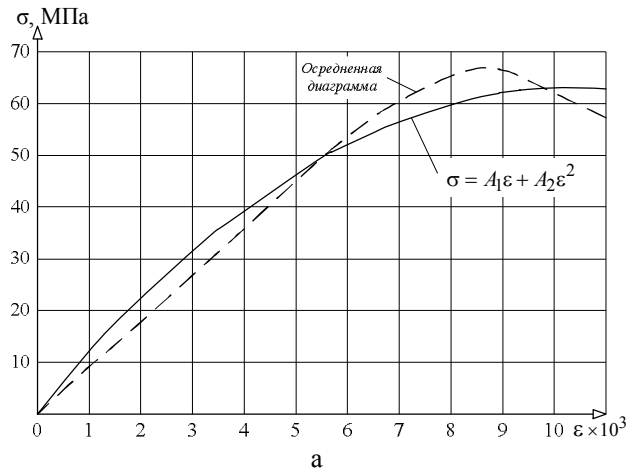


Рис.4. Аппроксимирующие диаграммы, построенные по аналитическим выражениям: а — (14), б — (15), в — (16), а также осредненная диаграмма

Результаты аппроксимации

	A_1	A_2	A_3	$\bar{\eta} = \sqrt{1 - \frac{\sum \Delta^2}{\sum \alpha^2}}$
$\sigma = A_1 \varepsilon + A_2 \varepsilon^2$	12187	-587319	—	0,979
$\sigma = A_1 \varepsilon + A_3 \varepsilon^3$	10296	—	-40072970	0,993
$\sigma = A_1 \varepsilon + A_2 \varepsilon^2 + A_3 \varepsilon^3$	7132	886105	-96578196	0,999

Наибольшую степень близости между опытными и вычисленными по уравнениям данными дает выражение (16), для которого $\bar{\eta} = 0,999$ (в пределе $\bar{\eta} = 1$). Уравнение (15) также дает хорошую сходимость с экспериментальными данными и одновременно является более простым, чем уравнение (16).

Выражения (15) и (16) аппроксимируют ниспадающий участок диаграммы, что отражает реальную работу древесины на сжатие перед разрушением и в момент исчерпания несущей способности. Таким образом, оба выражения могут быть использованы в расчетных моделях деревянных элементов.

Заключение

Для аппроксимации работы древесины при сжатии исследователями предлагаются различные аналитические выражения. Оценка степени их соответствия экспериментальным диаграммам позволяет рекомендовать для использования в расчетных моделях деревянных элементов полином третьей степени.

1. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 208 с.
2. Лукаш П.А. Расчет пологих оболочек и плит с учетом физической и геометрической нелинейности // Расчет конструкций работающих в упругопластической стадии: Сб. тр. ЦНИИСК. М.: Госстройиздат, 1961. Вып.7. С.268-320.
3. Prager W. Uber die Querschnittbemessung zweigurtiger Holzholme // Z.F.M. 1933. №19. S.197-201.
4. Prager W. Ein neues Verfahren zur Bemessung auf Biegung beanspruchter Holzstabe // Schweizerische Bauzeitung. 1934. Bd.104. №18. S.201-202.
5. Белянкин Ф.П. Пластические деформации дерева при изгибе. М.: Изд-во ЦАГИ, 1936. 49 с.
6. Белянкин Ф.П., Яценко В.Ф. Прочность и деформативность деревянных стержней при центральном, внецентренном сжатии и чистом изгибе. Киев.: Изд-во АН УССР, 1960. 85 с.
7. Коченов В.М. Несущая способность элементов и соединений деревянных конструкций. М.: Стройиздат, 1953. 320 с.
8. Дыбенко Г.И. Предельное состояние деревянной балки при изгибе со сжатием // Сб. науч. тр. Киевского ИСИ, 1959. Вып.12. С.33-44.
9. Шляпин В.А. Внецентренное сжатие деревянных стержней. Свердловск, 1965. 38 с.
10. Губенко А.Б. Устойчивость центрально сжатых цельных деревянных стержней // Исследование прочности и устойчивости деревянных стержней: Сб. ЦНИПС. М.: Стройиздат, 1940. С.3-13.
11. Кочетков Д.А. Продольный изгиб цельных деревянных стержней за пределом упругости // Проект и стандарт. 1937. №3. С.26-34.
12. Быков В.В. Экспериментальные исследования прочности и деформативности древесины сибирской лиственницы при сжатии и растяжении вдоль волокон с учетом длительного действия нагрузки // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1967. №8. С.3-8.
13. Леннов В.Г. Экспериментальное исследование древесины сосны на сжатие и растяжение вдоль волокон с учетом длительного воздействия нагрузок // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1958. №2. С.147-157.
14. Пинаджан В.В. Расчет деревянных стержней цельного поперечного сечения на одновременное действие изгиба и осевого сжатия. Тифлис: ЗИС, 1934. Вып.19.71 с.

15. Иванов А.М. Исследование диаграммы механических испытаний древесины // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1959. №4. С.116-122.
16. Ylinen A. Uber die Bestimmung der zeitbedingten elastischen und Festigkeitseigenschaften des Holzes mit Hilfe eines allgemeinen nichtlinear visko-elastischen reologischen Modelles // Holz als Roh- und Werkstoff. 1965. V.23. №5. S.193-196.
17. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 155 с.
18. Бельский Г.Е. Устойчивость центрально сжатых стержней и рам в упругопластической стадии // Расчет конструкций работающих в упругопластической стадии: Сб. тр. ЦНИИСК. М.: Госстройиздат, 1961. Вып.7. С.239-267.
19. Воронюк И.С. Учет нисходящей ветви диаграммы деформаций при чистом изгибе // Строительная механика и расчет сооружений. 1983. №4. С.17-20.
20. Рабинович А.И. Поперечный изгиб цельных деревянных стержней // Исследование прочности и устойчивости деревянных стержней: Сб. ЦНИПС. М.: Стройиздат, 1940. С.57-103.
21. Рафаилов А.Г. Оценка концентрации напряжений с помощью аппроксимации кривой деформирования материала // Пространственные конструкции в Красноярском крае: Межвуз. сб. Красноярск, 1985. С.108-113.
22. Пятикрестовский К.П. О расчете пространственных конструкций с учетом физической нелинейности // Современные пространственные конструкции: Справочник. М.: Высшая школа, 1991. С.453-458.
23. Труль О.А. Математическая статистика в лесном хозяйстве. Минск.: Высшая школа, 1966. 233 с.

Bibliography (Transliterated)

1. Lukash P.A. Osnovy nelineinoy stroitel'noi mekhaniki. M.: Stroizdat, 1978. 208 s.
2. Lukash P.A. Raschet pologikh obolochek i plit s uchetom fizicheskoi i geometricheskoi nelineinosti // Raschet konstruktssii rabotaiushchikh v uprugoplasticheskoi stadii: Sb. tr. TsNIISK. M.: Gosstroizdat, 1961. Vyp.7. S.268-320.
3. Prager W. Uber die Querschnittbemessung zweigurtiger Holzholme // Z.F.M. 1933. №19. S.197-201.
4. Prager W. Ein neues Verfahren zur Bemessung auf Biegung beanspruchter Holzstabe // Schweizerische Bauzeitung. 1934. Bd.104. №18. S.201-202.
5. Beliankin F.P. Plasticheskie deformatsii dereva pri izgibe. M.: Izd-vo TsAGI, 1936. 49 s.
6. Beliankin F.P., Iatsenko V.F. Prochnost' i deformativnost' dereviannykh sterzhnei pri tsentral'nom, vnetsentrennom szhatii i chistom izgibe. Kiev.: Izd-vo AN USSR, 1960. 85 s.
7. Kochenov V.M. Nesushchaia sposobnost' elementov i soedinenii dereviannykh konstruktssii. M.: Stroizdat, 1953. 320 s.
8. Dybenko G.I. Predel'noe sostoianie dereviannoi balki pri izgibe so szhatiem // Sb. nauch. tr. Kievskogo ISI, 1959. Vyp.12. S.33-44.
9. Shliapin V.A. Vnetsentrennoe szhatie dereviannykh sterzhnei. Sverdlovsk, 1965. 38 s.
10. Gubenko A.B. Ustoichivost' tsentral'no szhatykh tsel'nykh dereviannykh sterzhnei // Issledovanie prochnosti i ustoiichivosti dereviannykh sterzhnei: Sb. TsNIPS. M.: Stroizdat, 1940. S.3-13.
11. Kochetkov D.A. Prodol'nyi izgib tsel'nykh dereviannykh sterzhnei za predelom uprugosti // Proekt i standart. 1937. №3. S.26-34.
12. Bykov V.V. Eksperimental'nye issledovaniia prochnosti i deformativnosti drevesiny sibirskoi listvennitsy pri szhatii i rastiazhenii vdol' volokon s uchetom dlitel'nogo deistviia nagruzki // Izvestiia vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura. 1967. №8. S.3-8.
13. Lennov V.G. Eksperimental'noe issledovanie drevesiny sosny na szhatie i rastiazhenie vdol' volokon s uchetom dlitel'nogo vozdeistviia nagruzok // Izvestiia vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura. 1958. №2. S.147-157.

14. Pinadzhn V.V. Raschet dereviannykh sterzhnei tsel'nogo poperechnogo secheniia na odnovremennoe deistvie izgiba i oseвого szhatiia. Tiflis: ZIS, 1934. Vyp.19.71 s.
15. Ivanov A.M. Issledovanie diagrammy mekhanicheskikh ispytanii drevesiny // Izvestiia vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura. 1959. №4. S.116-122.
16. Ylinen A. Uber die Bestimmung der zeitbedingten elas-tischen und Festigkeitseigenschaften des Holzes mit Hilfe eines allgemeinen nichtlinear visko-elastischen reologischen Mod-elles // Holz als Roh- und Werkstoff. 1965. V.23. №5. S.193-196.
17. Khoff N. Prodol'nyi izgib i ustoichivost'. M.: Izd-vo inostranoi literatury, 1955. 155 s.
18. Bel'skii G.E. Ustoichivost' tsentral'no szhatykh sterzhnei i ram v uprugoplasticheskoi stadii // Raschet konstruktсии rab-otaiushchikh v uprugoplasticheskoi sadii: Sb. tr. TsNIISK. M.: Gosstroizdat, 1961. Vyp.7. S.239-267.
19. Voroniuk I.S. Uchet niskhodiashchei vetvi diagrammy de-formatsii pri chistom izgibe // Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii. 1983. №4. S.17-20.
20. Rabinovich A.I. Poperechnyi izgib tsel'nykh dereviannykh sterzhnei// Issledovanie prochnosti i ustoichivosti dereviannykh sterzhnei: Sb. TsNIPS. M.: Stroiizdat, 1940. S.57-103.
21. Rafailov A.G. Otsenka kontsentratsii napriazhenii s po-moshch'iu approksimatsii krivoi deformirovaniia materiala // Prostranstvennye konstruktсии v Krasnoiarskom krae: Mezhevuz. sb. Krasnoiarsk, 1985. S.108-113.
22. Piatikrestovskii K.P. O raschete prostranstvennykh konstruktсии s uchetom fizicheskoi nelineinosti // Sovremennye prostranstvennye konstruktсии: Spravochnik. M.: Vysshiaia shkola, 1991. S.453-458.
23. Trull' O.A. Matematicheskaiia statistika v lesnom khoziaistve. Minsk.: Vysshiaia shkola, 1966. 233 s.