

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В проектировании
транспортных
сооружений



МОСКВА «ТРАНСПОРТ» 1981

Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений/А. С. Городецкий, В. И. Зоворицкий, А. И. Лантух-Лященко, А. О. Рассказов. — М.: Транспорт, 1981. — 143 с.

В книге дано теоретическое обоснование и приведены практические приемы использования метода при решении физически нелинейных задач механики. Описаны способы составления универсальных алгоритмов и современных вычислительных комплексов на ЭВМ третьего поколения. Рассмотрены конкретные примеры расчета транспортных сооружений, связанные с вопросами устойчивости земляного полотна, определения напряженно-деформированного состояния дорожных одежд, пролетных строений и отдельных узлов мостовых конструкций.

Книга предназначена инженерам, занимающимся проектированием транспортных сооружений. Она может быть полезна научным работникам и студентам.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Н. Н. Шапошников.

XXVI съезд КПСС в своих решениях отразил необходимость сосредоточить усилия на развитии математической теории, повышении эффективности ее использования в прикладных целях.

В этой связи при расчете транспортных сооружений должен найти широкое применение метод конечных элементов. Инженеров-проектировщиков привлекает универсальность метода, хорошо обоснованный математический аппарат, позволяющий с одинаковым успехом решать как линейные, так и нелинейные сложные задачи механики и ориентированный на численную реализацию с помощью ЭВМ. Идеи метода в применении к расчету стержневых систем применялись уже в начале века. Однако сейчас, воспользовавшись формализованным математическим аппаратом этого метода даже в применении к стержневым системам, инженеры получили простые гибкие алгоритмы, хорошо описывающие дискретную модель сооружения.

Будучи по своей природе вариационным, метод конечных элементов хорошо приспособлен для решения двумерных и трехмерных задач прикладной механики со сложными граничными условиями. В СССР благодаря работам А. Ф. Смирнова, А. Р. Ржаницына, А. П. Филина, Л. А. Розина, А. В. Александрова, Б. Я. Лашеникова, Н. Н. Шапошникова, В. А. Постнова, В. Г. Корнеева и ряда других авторов этот метод получил четкое математическое обоснование и стал признанным инструментом в расчетах сооружений, в том числе таких элементов транспортных сооружений, как плиты, балки-стенки, оболочки, многослойная проезжая часть или грунтовые массивы, взаимодействующие с конструкциями.

Работы, посвященные методу конечных элементов, можно (с известной степенью условности) разделить на теоретические, обосновывающие метод, и практические, в которых рассматриваются различные аспекты его численной реализации. Ориентируя свою книгу в основном на инженеров-проектировщиков, авторы поставили перед собой задачу объединить теоретические и практические направления так, чтобы инженер, проектирующий сложные сооружения, мог получить представление не только о возможностях и методах численной реализации, но и о теоретических основах метода конечных элементов, способствующих

творческому его применению. Это обстоятельство определило отбор материала для книги.

Большое количество публикуемых работ, посвященных этому методу, свидетельствует о том, что он находится в стадии развития. Много проблем остается еще нерешенными. В этом смысле теоретический материал книги, содержащий обоснование применения несовместных конечных элементов, выводит метод за рамки вариационного, придает определенную математическую самостоятельность и существенно дополняет его теорию.

Важной является часть книги, посвященная теоретическому обоснованию возможности использования метода для физически нелинейных задач и способов решения нелинейных уравнений.

С практической точки зрения безусловный интерес представляет достаточно полный набор матриц жесткости для различных типов конечных элементов и описание принципов реализации метода конечных элементов на современных вычислительных машинах третьего поколения.

В книге использованы исследования и расчеты, выполненные авторами в Киевском Научно-исследовательском институте автоматизированных систем планирования и управления в строительстве (НИИАСС) Госстроя СССР и Киевском автомобильно-дорожном институте им. 60-летия Великой Октябрьской социалистической революции.

Авторы, не отрицая сложившихся традиционных методов расчета сооружений, предлагают вниманию читателей книгу, посвященную сравнительно новому методу, и надеются, что эта книга с интересом будет принята инженерами, научными работниками, аспирантами, студентами старших курсов транспортных и строительных вузов и послужит делу создания высокоэффективных конструкций транспортных сооружений.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту д-ру техн. наук, проф. Н. Н. Шапошникову за ценные замечания и пожелания по рукописи.

Авторы

Основные условные обозначения:

A — дифференциальный оператор задачи;
 u — вектор перемещений;
 f — вектор внешних нагрузок;
 B — матрица операций дифференцирования;
 D — матрица упругости;
 Ω — область рассматриваемой задачи;
 $I(u)$ — функционал полной потенциальной энергии системы;
 Π — потенциальная энергия деформации;

W — работа внешних сил;
 σ — вектор напряжений;
 s — вектор деформаций;
 φ — вектор координатных функций;
 q — вектор степеней свободы;
 K — матрица жесткости всей системы;
 P — вектор внешней нагрузки в узлах;
 Ω_r — область r . конечного элемента;
 K_r — матрица жесткости r конечного элемента.

1.1. Основные положения

Метод конечных элементов¹ рассматривается ниже для варианта перемещений, т. е. для случаев, когда искомой разрешающей функцией служит перемещение. Это вызвано тем, что выбор расчетной схемы для МКЭ в перемещениях легко поддается алгоритмизации, а практическое использование МКЭ немыслимо без применения вычислительной техники.

Краевые задачи механики в операторном виде записываются так:

$$Au \equiv -(Bu)^T DBu = f. \quad (1.1)$$

Свойства дифференциального оператора A для задач механики (положительная определенность, самосопряженность) позволяют осуществить вариационную постановку этих задач, т. е. заменить задачу решения дифференциальных уравнений (1.1) задачей нахождения минимума функционала

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Au, u) d\Omega - \int_{\Omega} f u d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Bu)^T DBu - \int_{\Omega} f u d\Omega. \quad (1.2)$$

Это значит, что значения u , доставляющие минимум функционалу (1.2), в то же время являются и решением системы (1.1). Вариационная постановка задачи имеет определенные преимущества, которые вытекают из того, что порядок дифференциального оператора понижается в 2 раза. Отсюда создаются условия более удобного формулирования граничных условий, смягченных требований к координатным функциям и более простого представления разностных выражений. Используя обозначения механики функционал (1.2) можно представить в виде

$$I(u) = \Pi - W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} f^T u d\Omega, \quad (1.3)$$

где Π — потенциальная энергия деформаций; $\sigma\epsilon$ — векторы напряжений и деформаций.

Метод конечных элементов вариационный, т. е. является методом нахождения минимума функционала (1.3). Основная кон-

¹ Для чтения предлагаемого материала необходимо знать общие теоретические основы метода конечных элементов (МКЭ), которые хорошо описаны в монографиях [31, 49, 62, 63, 64, 67, 69].

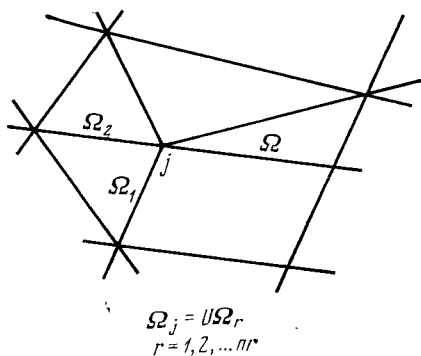


Рис. 1.1

цепция МКЭ заключается в непосредственной дискретизации рассчитываемой системы, которая расчленяется расчетной сеткой на конечные элементы. На полученной дискретной модели вводится система кусочно-непрерывных функций $\{\varphi_l(x)\}$, определенных на конечном числе подобластей — звездах конечных элементов (рис. 1.1), т. е.

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} \varphi_{lj}(x) & x \in \Omega_j \\ 0 & x \notin \Omega_j \end{cases}$$

Функции φ_l называются координатными или аппроксимирующими. Искомая функция перемещений по области системы $\Omega - u(x)$, $x \in \Omega$ приближенно принимается в виде:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^L q_i \varphi_i(x), \quad (1.4)$$

где L — общее число степеней свободы, которое в общем случае не равно числу узлов, так как в каждый узел может быть введено различное число степеней свободы.

Степени свободы q_i в МКЭ, как правило, снабжаются физическим смыслом и представляют собой искомые значения перемещений и их производных в узлах расчетной сетки.

На основе подстановки (1.4) в (1.3) задача определения непрерывной функции $U(x)$ сводится к определению значений конечного числа степеней свободы q_i , которые находят из условия минимума функционала (1.3), т. е. из системы уравнений:

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_l} I(u_h) \right] = \frac{d}{dq_l} (\Pi - W) = \frac{\partial}{\partial q_l} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\mathbf{B} \cdot \sum_{i=1}^L q_i \varphi_i(x) \right]^T \times \right. \\ \left. \times \mathbf{D} \left[\mathbf{B} \sum_{i=1}^L q_i \varphi_i(x) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^L f q_i^T \varphi_i d\Omega \right\} = \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{P} = 0 \text{ при } l = 1, 2, \dots, L. \quad (1.5)$$

При решении системы (1.5) полагается, что $u_h(x)$ удовлетворяет главным граничным условиям. По найденным из (1.5) значениям $\mathbf{f}$ на основе (1.4) определяется функция перемещений по области системы, а по ней на основе известных соотношений теории упругости и другие компоненты напряженно-деформированного состояния.

Расчленение системы на конечные элементы, выполненное на первом этапе расчета, дает возможность представить потенци-

альную энергию деформаций Π и работу внешних сил W в виде сумм по отдельным элементам:

$$\Pi = \sum_r \Pi_r, \quad W = \sum_r W_r. \quad (1.6)$$

Это позволяет составлять элементы матрицы K и вектора P из отдельных компонентов. Так, l_j — элемент матрицы K и l — элемент вектора P определяются по формулам

$$K_{lj} = \sum_{r \in l_j} K_{lj,r}; \quad P_l = \sum_{r \in l} P_{l,r}, \quad (1.7)$$

где $r \in l_j$, $r \in l$ (у знака суммы) — суммирование по всем элементам, содержащим l и j степени свободы; $K_{lj,r}$, $P_{l,r}$ — компоненты матрицы жесткости и вектора узловых сил r — конечного элемента.

Эти компоненты получаются из подстановки уравнений (1.6) и (1.5) и выделения l_j слагаемого из выражения для потенциальной энергии деформации, а также l слагаемого из выражения для работы внешних сил для r конечного элемента, т. е.:

$$K_{lj,r} = \int_{\Omega_r} (B\varphi_l)^T DB(\varphi_j) d\Omega_r; \quad (1.8)$$

$$P_{l,r} = \int_{\Omega_r} \varphi_l^T f d\Omega_r, \quad (1.9)$$

где Ω_r — область r конечного элемента.

Таким образом, МКЭ дает возможность строить разрешающую систему уравнений (1.5) на основе рассмотрения каждого отдельного конечного элемента, что очень удобно в реализации и является важным достоинством метода.

После выбора системы координатных функций $\{\varphi_l\}$ процедура МКЭ представляется достаточно формализованной. Выбор же $\{\varphi_l\}$ — самый ответственный этап, так как он определяет сходимость метода, точность решения задачи, разрешимость системы (1.5). Мнение о том, что наглядность МКЭ позволяет достаточно просто строить координатные функции из чисто физических соображений, на основе интуиции и т. п., может привести к грубым ошибкам. В настоящее время создан аппарат, позволяющий правильно законструировать или проверить выбранные координатные функции с точки зрения сходимости решения, обусловленности системы (1.5) и других факторов (см. п. 1.2).

Рассмотренная процедура МКЭ характерна для метода перемещений. Функционал (1.2) называется функционалом полной потенциальной энергии системы или функционалом Лагранжа. Если в основу решения задачи положен функционал Кастильяно, то такой вариант МКЭ аналогичен методу сил, а если функционал Рейсснера, то смешанному методу. В практической реализа-

ции наиболее удобен вариант МКЭ в перемещениях, поэтому дальнейшее изложение ориентировано на применение именно этого метода.

1.2. Выбор координатных функций

Расчленение системы на конечные элементы дает возможность использовать рассмотрение отдельных конечных элементов не только для построения разрешающей системы (1.5), т. е. для практического решения задачи, но и для теоретических исследований координатных функций, абстрагируясь при этом от геометрии рассматриваемой области, граничных условий, нагрузки. Это обуславливает введение понятия «тип конечного элемента», который характеризуется набором степеней свободы, видом координатных функций, геометрией области Ω_r , классом решаемых задач (видом оператора A), для которых он предназначен. Координатные функции на r конечном элементе могут быть введены в явном или неявном виде.

В первом случае каждой j_r степени свободы ставится в соответствие j_r аппроксимирующая функция, т. е. аппроксимация имеет вид:

$$u_h(x) = \sum_{j_r=1}^{nr} q_{j_r} \varphi_{j_r}(x); \quad x \in \Omega_r, \quad (1.10)$$

где nr — общее число степеней свободы относящихся к r конечному элементу с областью Ω_r .

Во втором случае аппроксимация задается степенным полиномом, т. е. в виде

$$u_h(x) = a_{1r} \psi_{1r} + a_{2r} \psi_{2r} + a_{j_r} \psi_{j_r} + \dots + a_{mr} \psi_{mr}; \quad x \in \Omega_r, \quad (1.11)$$

где a_{j_r} и ψ_{j_r} ($j_r=1, 2, \dots, mr$) — коэффициенты и степенные функции.

Степени свободы q_{j_r} связаны с коэффициентами a_{j_r} соотношением

$$q_r = V a_r; \quad a_r = V^{-1} q_r.$$

Матрица V строится, как правило, из соображений, что при подстановке в полином координат определенного узла величина u должна принимать значение степени свободы q в этом узле. Для однозначного перехода от q_r к a_r и наоборот необходимо чтобы матрица V была квадратной, т. е. $nr=mr$. Это достигается за счет варьирования числа членов в полиноме, которое производится с учетом удовлетворения координатными функциями определенных требований, рассматриваемых ниже.

Тождественность МКЭ и метода Рунта была показана в отечественных [36, 62] и зарубежных [69, 81] работах. Взаимосвязь этих методов создает теоретические основы для выбора

оценки координатных функций МКЭ. Так, на основе работы [43] можно сформулировать требования, которым должны удовлетворять функции φ_i , чтобы обеспечить сходимость МКЭ:

1) система координатных функций $\{\varphi_i\}$ должна принадлежать энергетическому пространству дифференциального оператора задачи **A**. Это означает, что наряду с удовлетворением главным граничным условиям представление разрешающей функции u должно обеспечить существование по всей области Ω тех перемещений и их производных, которые входят в функционал (1.2);

2) функции φ_i должны быть линейно независимы. Это требование необходимо для разрешимости системы (1.5);

3) система координатных функций $\{\varphi_i\}$ должна быть полна в энергетическом пространстве оператора **A**. Это означает, что функции (1.4) при неограниченном сгущении сетки могут аппроксимировать в энергетическом смысле любые возможные перемещения по области Ω с любой заранее заданной степенью точности.

Таким образом, теоретическое обоснование функций φ_i может быть сведено к их проверке на удовлетворение перечисленным выше требованиям.

Принадлежность к энергетическому пространству оператора **A** устанавливается существованием компонентов напряженно-деформированного состояния, которые входят в соответствующий функционал. Так, для трехмерного и плоского напряженного состояния дифференциальный оператор **A** имеет второй порядок, в функционал Лагранжа входят первые производные по перемещениям. Поэтому для их существования необходимо обеспечить непрерывность перемещений по области системы. Из тех же соображений при решении задач изгиба плиты или оболочек (порядок дифференциального оператора — 4) необходимо обеспечить непрерывность как перемещений, так и их первых производных.

По области конечных элементов, как правило, это требование удовлетворяется автоматически, поэтому проверять надо неразрывность соответствующих компонентов только по линиям контактов конечных элементов. В связи с этим элементы, координатные функции которых удовлетворяют этому условию, называются совместными.

Линейная независимость координатных функций проверяется достаточно легко и, как правило, выполняется для МКЭ автоматически.

Для проверки полноты необходимо установить порядок p полинома, который выражается линейными комбинациями функции $\varphi_{j,g}$, и в случае $p \geq m$ ($2m$ — порядок дифференциального оператора **A**) третье требование выполняется. В дальнейшем число p будем называть порядком аппроксимации системы координатных функций. В работе [34] получено соотно-

шение, позволяющее определить p для произвольных сеток и наборов степеней свободы в узлах:

$$\sum_{x_j \in \Omega_r} \sum_{g=1}^{g_{ij}} (\mathbf{B}_{jg} x^{\tau})(x_j) \varphi_{jg}(x) = x^{\tau} \quad (1.12)$$

при $|\tau| \leq p$ и $x \in \Omega_r$,

где x_j — узлы конечного элемента Ω_r ; g_j — число степеней свободы в узле j ; φ_{jg} , $\mathbf{B}_{jg}$ — координатная функция и дифференциальный оператор; g — степени свободы узла x_j ; τ — мультииндекс.

Если координатные функции φ_l удовлетворяют всем трем перечисленным выше требованиям, то сходимость МКЭ оценивается аналогично вариационно-разностным методам.

На основе теорем об оценках погрешности интерполяции функций степенными полиномами в работе [63] показано, что

$$\|u - u_h\|_A \leq ch^{p+1-m}, \quad (1.13)$$

где u, u_h — точное и приближенное решения; h — максимальный диаметр элементов; c — константа, измеряющая погрешность.

Из энергетической оценки (1.13) вытекает средняя квадратичная оценка для напряжений, т. е.

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{L_2} \leq ch^{p+1-m}, \quad (1.14)$$

где σ, σ_h — соответственно точное и приближенное значения напряжений.

Используя прием Нитше [69], из (1.13) можно получить среднюю квадратичную оценку для перемещений с более высоким порядком сходимости:

$$\|u - u_h\|_{L_2} \leq cht; \quad (1.15)$$

$t = 2(p + 1 - m)$ при $p + 1 \leq 2m$ и $t = p + 1$ при $p + 1 \geq 2m$.

От средних квадратичных оценок (1.14), (1.15), используя известное неравенство $\|v_h\|_A \geq [v]_C m h^{-s/2}$, можно перейти к оценкам максимальных погрешностей в отдельных точках области Ω :

$$\max_{x \in \Omega} |\sigma - \sigma_h| \leq ch^{p+1-m-s/2}, \quad (1.16)$$

$$\max_{x \in \Omega} |u(x) - u_h(x)| \leq ch^{t-s/2}, \quad (1.17)$$

где s — мерность пространства решаемой задачи.

Оценки (1.16), (1.17) свидетельствуют, что МКЭ при достаточно высоком порядке аппроксимации p имеет сходимость не только в обобщенном энергетическом смысле, но и для отдельных точек, даже при наличии различных сингулярностей в геометрии, граничных условиях, нагрузке.

В ряде случаев оценки типа' (1.16), (1.17) могут быть получены с более высоким порядком. Так, при $m > 0,5s$ (что характерно для тонких плит, оболочек) из (1.13) и на основе теорем вложения С. Л. Соболева [68] следует, что

$$\max_{x \in \Omega} |u(x) - u_h(x)| \leq ch^{p+1-m},$$

а при $m = 0,5s$ (что характерно, например, для задач плоского напряженного состояния) может быть получена оценка

$$\max_{x \in \Omega} |u(x) - u_h(x)| \leq ch^{p+1-m} |\ln h|.$$

Приведенные оценки имеют не только чисто теоретическое значение, но могут оказаться полезными при практических расчетах, например если интересует вопрос, как далеко полученное приближенное решение отстоит от точного. На основе оценок (1.13) — (1.17) можно примерно оценить абсолютную погрешность для имеющегося приближенного решения, если известны константы c .

В работах [44, 79] намечены пути их определения для различных классов задач теории упругости. Однако это может оказаться очень трудоемким и несоизмеримо более сложным, чем решение самой задачи. Вместе с тем можно предложить другой путь, заключающийся в том, что на основе двух расчетов с последовательным сгущением сетки (например, в 2 раза), используя оценки (1.13) — (1.17), можно составить примерное представление о точном решении и иметь суждение о расчетной сетке, необходимой для достижения заданной точности¹. Этот прием можно рассматривать как перенесение на МКЭ идеи Ричардсона для разностных схем, которая обоснована и исследована в работе [42].

Существует целый класс так называемых «несовместных» конечных элементов, которые образуются на основе функций φ_i , удовлетворяющих второму и третьему требованиям, т. е. линейной независимости и полноты, и не удовлетворяющих первому требованию принадлежности к энергетическому пространству H_A . В связи с этим оценки (1.13) — (1.17) непригодны для таких элементов и для доказательства сходимости здесь требуются новые приемы. Впервые доказательство сходимости для конкретного несовместного конечного элемента было получено в работе [83]. Рассматривался прямоугольный элемент плиты (элемент Клафа) с тремя степенями свободы в узле. При доказательстве существенно использовалась геометрия области (прямоугольная плита) и граничные условия (защемление по контуру). Более общие приемы доказательства сходимости несовместных элементов были получены в работах [45, 69]. Здесь доказательство сходимости сводилось к проверке устойчивости системы (1.5) и выполнения условий кусочного тестирования.

¹ Примеры исследования некоторых конечных элементов на основе оценок (1.13) — (1.17) приведены в п. 1.3.

В физическом смысле устойчивость системы (1.5) означает, что система, образованная из несовместных конечных элементов геометрически неизменяема (естественно подразумевается, что исходная система также геометрически неизменяема). При конечном расчленении выполнение этого условия очевидно. Однако при неограниченном сгущении сетки эта очевидность исчезает и здесь необходимы строгие исследования.

Условие кусочного тестирования в физическом смысле означает, что суммарная энергия, накапливаемая в разрывах между несовместными конечными элементами при неограниченном сгущении сетки стремится к нулю.

Несмотря на достаточную общность, эти приемы требуют рассмотрения совокупности конечных элементов, что может привести к определенным затруднениям. Более совершенные методы предложены в работах [34, 25]. Сформулированная теорема [25] дает возможность судить о сходимости несовместного конечного элемента на основе рассмотрения координатных функций только по области этого элемента, т. е. аналогично тому, как делалось для совместных элементов (см. п. 1.1).

Теорема Евзерова. Для несовместных конечных элементов справедлива оценка погрешности

$$\|u - u_h\|_A \leq Kh^t \quad (1.18)$$

при выполнении следующих условий:

- 1) несовместные функции φ_{jg} удовлетворяют тождествам (1.12) при некотором $p \geq m$;
- 2) существуют совместные функции λ_{jg} (при тех же степенях свободы), удовлетворяющие тождествам (1.12) при $p_1 = m - 1$;
- 3) на каждом конечном элементе выполнены равенства:

$$a_i(x^\tau, \varphi_{jg} - \lambda_{jg}) = 0; \quad |\tau| \leq m + t_1 - 1, \quad t_1 > 0;$$

$$t = \min\{p + 1 - m, m, t_1\};$$

$$a_i(v_1, v_2) = \int_{\Omega_r} (Bv_1)^T D B v_2 d\Omega_r.$$

Как видно из (1.18), для сходимости МКЭ достаточно справедливости условия 3 теоремы при $t_1 = 1$. В этом случае условие 3 означает, что при постоянной по конечным элементам (КЭ) деформации работа внутренних сил, соответствующих этой деформации, на несовместных перемещениях φ_{jg} равна работе тех же сил на совместных перемещениях λ_{jg} , что указывает на некоторую энергетическую эквивалентность функций φ_{jg} и λ_{jg} .

Получение из (1.18) средней квадратичной оценки напряжений, а также оценок максимальных погрешностей для отдельных точек производится таким же образом, как и для совместного случая, т. е. аналогично получению оценок (1.14), (1.16), (1.17).

Сходимость несовместных конечных элементов проверяется по следующей схеме. Вначале проверяется выполнение тождеств (1.12), а потом подбираются совместные функции λ_{jg} , удовлетворяющие условиям 2 и 3 теоремы. Функции λ_{jg} ищутся как решение следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \text{тождества (1.12) при } p=m_0-1; \\ a_i(x^\tau, \lambda_{jg}) = a_\tau(x^\tau, \varphi_{jg}), \quad |\tau| \leq m+t_1-1. \end{array} \right\} \quad (1.19)$$

Теорема Евзерова дает возможность не только устанавливать порядок сходимости метода при использовании известных несовместных элементов, но и конструировать новые элементы. Схема конструирования новых элементов такова:

1) строят совместные функции λ_{jg} , удовлетворяющие тождествам (1.12) при $p < m_0 - 1$. Функции λ_{jg} подставляют в остальные тождества. При этом получают некоторые невязки $T_\gamma(x)$ при $m_0 \leq |\gamma| \leq p$;

2) проверяют равенства $a_i(x^\tau, T_\gamma(x)) = 0$ при $|\tau| \leq m+t_1-1$;

3) на основе тождеств, которым удовлетворяют φ_{jg} и λ_{jg} , строят систему, которая решается относительно $\varphi_{jg} - \lambda_{jg}$. Функции $\varphi_{jg} - \lambda_{jg}$ получают, как линейные комбинации $T_\gamma(x)$.

Полученные таким образом несовместные функции φ_{jg} удовлетворяют условиям теоремы, а следовательно, обеспечивают сходимость МКЭ.

Следовательно, сейчас уже имеется достаточно надежный аппарат для теоретического обоснования несовместных конечных элементов, использование которых до недавнего времени считалось некорректным. Доказательство сходимости МКЭ в несовместном случае не использует традиционные приемы вариационно-разностных методов и является новой математической задачей. Таким образом, если МКЭ в совместном случае можно классифицировать как модификацию метода Ритца, то обоснованное применение несовместных конечных элементов позволяет классифицировать МКЭ как самостоятельный метод не только с точки зрения процедурной реализации, но и с точки зрения теоретического обоснования.

1.3. Исследование конечных элементов

Приведем конкретные примеры оценки погрешности для различных типов конечных элементов. Своеобразные исследования конечных элементов из чисто физических соображений (проверка совместности элементов, условия жесткого смещения) даны в работе [31]. Приводимые ниже исследования основаны на современном представлении математической сущности МКЭ [45, 69] и используют соотношения (1.12) — (1.19).

Совместный прямоугольный конечный элемент для плоского напряженного состояния. В каждом узле этого элемента (рис. 1.2) вводится по две степени свободы $q_j^{(1)}, q_j^{(2)}$ при $j=1, 2, 3, 4$.

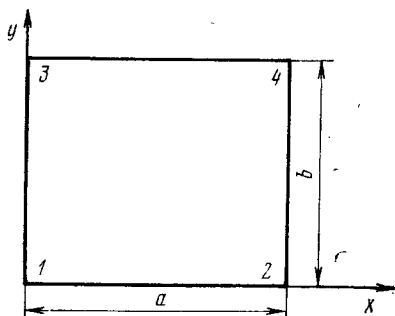


Рис. 1.2

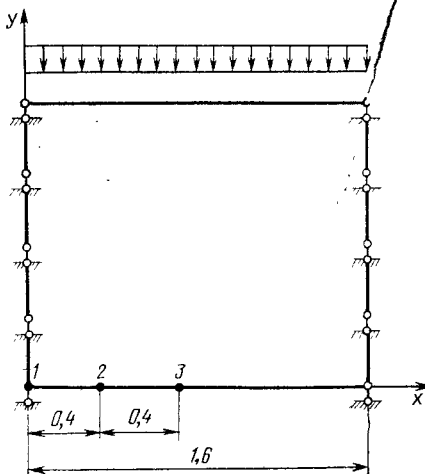


Рис. 1.3

Перемещения u, v независимо аппроксимируются функциями:

$$\left. \begin{aligned} u_h(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \varphi_i q_i^{(1)}; & v_h(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \varphi_i q_i^{(2)}; \\ \varphi_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta); & \varphi_2 &= \xi(1 - \eta); \\ \varphi_3 &= (1 - \xi)\eta; & \varphi_4 &= \xi\eta, \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

где $\xi = \frac{x}{a}$; $\eta = \frac{y}{b}$.

В неявном виде аппроксимация (1.20) выглядит так:

$$u_h(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy;$$

$$v_h(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy.$$

Функции φ_j равны единице в узле j и равны нулю на сторонах, которые не примыкают к j , изменяются по полилинейному закону на Ω_r и по линейному на сторонах, примыкающих к узлу j .

Система функций (1.20) линейно независима. Линейный закон изменения функций φ_i на сторонах конечных элементов обеспечивает существование напряжений и деформаций, входящих в функционал потенциальной энергии. Следовательно, система функций (1.20) принадлежит энергетическому пространству H_A .

Для плоского напряженного состояния порядок дифференциального оператора $2m=2$. Поэтому, чтобы показатель степени $p+1-m$ в оценках (1.13) — (1.17) был больше нуля, необходимо, чтобы порядок аппроксимации хотя бы равнялся 1, т. е. $p \geq 1$.

Для этого согласно (1.12) необходимо выполнение следующей системы тождеств:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &\equiv 1; \\ a(\varphi_2 + \varphi_4) &\equiv x; \\ b(\varphi_3 + \varphi_4) &\equiv y. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Подставляя (1.20) в (1.21) видим, что тождества удовлетворяются. Проверка функций (1.20) на удовлетворение требованиям аппроксимации более высокого порядка не проходит, так как система (1.20) не удовлетворяет тождествам, вытекающим из (1.12) для x^2 , y^2 и т. д. Таким образом, функция (1.20) отвечает всем трем требованиям. Так как $m=1$ и $p=1$, то на основе оценок (1.14) и (1.15) можно сделать вывод, что решение сходится по перемещениям с порядком h^2 , а по напряжениям с порядком h .

Проверим этот прогноз численным экспериментом. Рассчитаем жестко подвешенную прямоугольную балку-стенку под равномерно распределенную нагрузку $p=500$ тс/м, приложенную к верхней грани (рис. 1.3). Модуль упругости материала $E=2 \cdot 10^6$ тс/м², коэффициент Пуассона $\mu=0,15$, толщина конструкции $\delta=0,1$ м.

Решение этой задачи в рядах с высоким порядком сходимости для некоторых точек области приведено в графе 5 табл. 1.1. В графах 6, 7, 8, 9 приведены значения перемещений и напряже-

Таблица 1.1

№ точки	Координаты узлов		Вид перемещений и напряжений	Решение в рядах с точностью до пяти значащих цифр	Решение по МКЭ при расчетной сетке			
	x	y			4×4	8×8	16×16	32×32
1	0	0	u	-0,71927	-0,5808	-0,6808	-0,7093	-0,7167
			u	-0,50801	-0,4107	-0,4812	-0,5011	-0,5062
2	0,4	0	v	-0,67233	-0,5555	-0,6204	-0,6641	-0,6702
3	0,8	0	v	-0,94990	-0,7857	-0,9053	-0,9385	-0,9470
2	0,4	0	σ_x	264,82	190,27	228,00	246,80	255,8
3	0,8	0	σ_x	374,31	268,98	321,99	348,12	361,2

Примечание. Величины перемещений даны в мм, а напряжений — в кгс/см².

ний для трех точек нижней грани, полученные решением по МКЭ для различной густоты сетки. Как и следовало ожидать, порядок сходимости для перемещений составляет h^2 , а для напряжений h , так как с удвоением густоты сетки разность между точным и приближенным решением для перемещений уменьшается примерно в 4 раза, а для напряжений примерно в 2 раза.

Конечно, для отдельных точек следовало бы пользоваться оценками не (1.14) и (1.15), а (1.16) и (1.17), однако ввиду глад-

кости граничных условий, нагрузки и области системы не следует ожидать наличия каких-либо сингулярностей, в связи с чем оценки (1.16) и (1.17) в данном случае окажутся сильно заниженными. Из данного примера видно, что если точное решение не известно, то на основе оценок (1.14), (1.15) и двух расчетов, например при сетке 4×4 и 8×8 , можно составить представление о точном решении. Так, для точки 1 при сетке 4×4 $u_{4 \times 4} = -0,5808$, а при сетке 8×8 $u_{8 \times 8} = -0,6808$. Разность между ними составляет 0,1. Можно ожидать, что при следующем двойном сгущении сетки эта разность уменьшится в 4 раза, т. е. $u_{16 \times 16} \approx -0,6808 - 0,1/4 \approx -0,7058$, а $u_{32 \times 32} \approx -0,7058 - 0,025/4 = -0,7120$. Продолжая этот ряд, можно выяснить примерные пределы, в которых лежит точное значение этого перемещения.

Совместный прямоугольный конечный элемент плиты. Этот элемент (см. рис. 1.2) известен как элемент Богнера — Фокса — Шмита. В каждом j узле ($j=1, 2, 3, 4$) введено четыре степени свободы ($W_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j$; $j=1, 2, 3, 4$) и аппроксимация перемещений по области КЭ принята в виде:

$$w_h = \sum_{j=1}^4 (\varphi_{j,w} W_j + \varphi_{j,\alpha} \alpha_j + \varphi_{j,\beta} \beta_j + \varphi_{j,\gamma} \gamma_j); \quad (1.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1,w} &= X_1 Y_1; \varphi_{2,w} = X_2 Y_2; \varphi_{3,w} = X_1 Y_2; \varphi_{4,w} = X_2 Y_2; \\ \varphi_{1,\alpha} &= X_1 Y_3; \varphi_{2,\alpha} = X_2 Y_3; \varphi_{3,\alpha} = X_1 Y_4; \varphi_{4,\alpha} = X_2 Y_4; \\ \varphi_{1,\beta} &= -X_3 Y_1; \varphi_{2,\beta} = -X_4 Y_1; \varphi_{3,\beta} = -X_3 Y_2; \varphi_{4,\beta} = -X_4 Y_2; \\ \varphi_{1,\gamma} &= X_3 Y_3; \varphi_{2,\gamma} = X_4 Y_3; \varphi_{3,\gamma} = X_3 Y_4; \varphi_{4,\gamma} = X_4 Y_4; \\ X_1 &= a^{-3} (2x^3 - 3ax^2 + a^3); X_2 = -a^{-3} (2x^3 - 3ax^2); \\ X_3 &= a^{-2} (x^3 - 2ax^2 + a^2 x); X_4 = a^{-2} (x^3 - ax^2), \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

где $W_j, \varphi_{j,w}$ — степени свободы и координатные функции, соответствующие вертикальному перемещению в узле j ; $\alpha_j, \varphi_{j,\alpha}$ — то же, угловому перемещению относительно оси x , т. е. $\frac{\partial w}{\partial y}$; $\beta_j, \varphi_{j,\beta}$ — то же, относительно

оси y , т. е. $\frac{\partial w}{\partial x}$; $\gamma_j, \varphi_{j,\gamma}$ — то же, смешанной производной, т. е. $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$;

Y_j — полиномы аналогичные X_j (x заменяется на y , a на b).

Система аппроксимирующих функций (1.23) линейно независима. Нетрудно проверить, что эти функции обеспечивают непрерывность углов поворота по линиям контакта конечных элементов, а следовательно, и существование по всей области вторых производных, входящих в функционал потенциальной энергии. Таким образом, функции (1.23) принадлежат энергетическому пространству задачи. Для задачи изгиба плиты порядок дифференциального оператора $2m=4$. Поэтому чтобы показатель сте-

пени $p+1-m$ в оценках (1.13)–(1.17) был больше нуля, необходимо, чтобы порядок аппроксимации хотя бы равнялся 2 ($p \geq 2$). Порядок аппроксимации согласно (1.12) проверяется при помощи выполнения следующей системы тождеств:

$$\left. \begin{aligned}
 &\varphi_1, w + \varphi_2, w + \varphi_3, w + \varphi_4, w \equiv 1; \\
 &a(\varphi_2, w + \varphi_4, w) - \varphi_1, \beta - \varphi_2, \beta - \varphi_3, \beta - \varphi_4, \beta \equiv x; \\
 &b(\varphi_3, w + \varphi_4, w) + \varphi_1, \alpha + \varphi_2, \alpha + \varphi_3, \alpha + \varphi_4, \alpha \equiv y; \\
 &\frac{a^2}{2}(\varphi_2, w + \varphi_4, w) - a(\varphi_2, \beta + \varphi_4, \beta) \equiv \frac{x^2}{2}; \\
 &\frac{b^2}{2}(\varphi_3, w + \varphi_4, w) + b(\varphi_3, \alpha + \varphi_4, \alpha) \equiv \frac{y^2}{2}; \\
 &ab\varphi_4, w - b(\varphi_3, \beta + \varphi_4, \beta) + a(\varphi_2, \alpha + \varphi_4, \alpha) + \varphi_1, \gamma + \varphi_2, \gamma + \varphi_3, \gamma + \\
 &\quad + \varphi_4, \gamma \equiv xy; \\
 &\frac{a^3}{6}(\varphi_2, w + \varphi_4, w) - \frac{a^2}{2}(\varphi_2, \beta + \varphi_4, \beta) \equiv \frac{x^3}{6}; \\
 &\frac{b^3}{6}(\varphi_3, w + \varphi_4, w) + \frac{b^2}{2}(\varphi_3, \alpha + \varphi_4, \alpha) \equiv \frac{y^3}{6}; \\
 &\frac{a^2b}{2}\varphi_4, w - ab\varphi_4, \beta + \frac{a^2}{2}(\varphi_2, \alpha + \varphi_4, \alpha) + a(\varphi_2, \gamma + \varphi_4, \gamma) \equiv \frac{x^2y}{2}; \\
 &\frac{ab^2}{2}\varphi_4, w - \frac{b^2}{2}(\varphi_3, \beta + \varphi_4, \beta) + ab\varphi_4, \alpha + b(\varphi_3, \gamma + \varphi_4, \gamma) \equiv \frac{xy^2}{2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

По сути первые шесть условий (1.24) в соответствии с (1.12) являются условиями полноты, так как обеспечивают $p=2$. Остальные четыре условия (1.24) — условия повышенной точности, обеспечивающие $p=3$. Проверка функций (1.23) на удовлетворение требований более высокого порядка аппроксимации не получается, так как система (1.23) уже не удовлетворяет тождествам типа (1.24) для x^4 , y^4 и т. д. Таким образом, система функций (1.23) удовлетворяет всем трем требованиям и, следовательно, при использовании этих конечных элементов справедливы оценки (1.13)–(1.17), т. е. в данном случае порядок сходимости по перемещениям будет $h^{2(p+1-m)} = h^4$, а по напряжениям $h^{p+1-m} = h^2$.

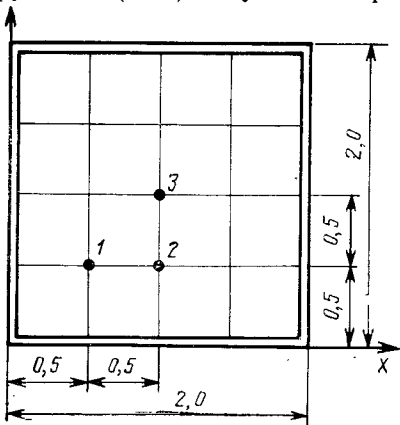


Рис. 1.4

Следующий численный пример подтверждает это. Рассчитывается квадратная шарнирноопертая плита (рис. 1.4) под равномерно распределенную нагрузку $p=100$ тс/м². Модуль упругости материала $E=3 \cdot 10^6$ тс/м², коэффициент Пуассона $\mu=0,25$, толщина плиты $\delta=0,1$ м.

Эта задача имеет решение в рядах с высоким порядком сходимости, которое ниже сравнивается с решением по МКЭ. Решение плиты по МКЭ производилось с последовательным удвоенным сгущением сетки.

Из табл. 1.2 видно, что со сгущением сетки в 2 раза разность между точным и приближенным решением для моментов умень-

Таблица 1.2

Номера узлов	Индекс перемещения или усилия	Решение в рядах с точностью до 7-значных цифр	Решение по МКЭ при расчетной сетке		
			4×4	8×8	16×16
1	W	12,79308	12,762	12,790	12,793
2	W	17,62905	15,593	17,626	17,628
3	W	24,37410	24,331	24,370	24,374
4	$M_x = M_y$	11,32153	11,242	11,301	11,316
2	M_x	13,63197	13,537	13,607	13,625
2	M_y	15,03546	14,930	15,009	15,029
3	$M_x = M_y$	18,41783	18,288	18,385	18,409

Примечание. Величины перемещений даны в мм, а моментов — в тс·м.

шается в 4 раза, а для перемещений в 10—20 раз (при удержании большего числа знаков для перемещений это отношение, по-видимому, приближалось бы к 16).

Рассуждения по поводу использования оценок (1.14) и (1.15), а не (1.16) и (1.17) и по поводу построения пределов для точного решения на основе двух приближенных для данного случая совершенно аналогичны рассуждениям для выше рассмотренного конечного элемента плоского напряженного состояния.

Несовместный прямоугольный элемент плиты. В каждом узле вводятся три степени свободы (W_j, α_j, β_j) и аппроксимация перемещений по области КЭ принимается в виде:

$$w_h(x, y) = \sum_{j=1}^4 (\varphi_{jw} W_j + \varphi_{j\alpha} \alpha_j + \varphi_{j\beta} \beta_j), \quad (1.25)$$

где $\varphi_{1w} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 - 3\eta^2 + 2\eta^3 - \xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3$;

$$\varphi_{1\alpha} = b(1 - \xi)(\eta - 2\eta^2 + \eta^3);$$

$$\varphi_{1\beta} = -a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)(1 - \eta);$$

$$\varphi_{2w} = 3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi\eta - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3;$$

$$\varphi_{2, \alpha} = b\xi (\eta - 2\eta^2 + \eta^3); \quad \varphi_{2, \beta} = a (\xi^2 - \xi^3) (1 - \eta);$$

$$\varphi_{3, w} = 3\eta^2 - 2\eta^3 + \xi\eta - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3;$$

$$\varphi_{3, \alpha} = b (1 - \xi) (-\eta^2 + \eta^3); \quad \varphi_{3, \beta} = -a (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \eta;$$

$$\varphi_{4, w} = -\xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi\eta^3 - 2\xi^3\eta;$$

$$\varphi_{4, \alpha} = b\xi (-\eta^2 + \eta^3); \quad \varphi_{4, \beta} = -a (-\xi^2 + \xi^3) \eta.$$

Обозначения степеней свободы и координатных функций аналогичны обозначениям, принятым для элемента Богнера — Фокса — Шмита.

В неявном виде аппроксимация (1.25) выглядит так:

$$w_h(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + \\ + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3 + a_{12}xy^3.$$

Система функций (1.25) обуславливает разрывы первой производной по направлению нормали к границе элемента и, следовательно, не принадлежит к энергетическому пространству для задач изгиба плиты.

Нетрудно установить, что тождества типа (1.24) удовлетворяются системой функций (1.25). Следовательно, в данном случае порядок аппроксимации $p=3$.

Подберем совместные функции, удовлетворяющие условиям 2 и 3 теоремы Евзерова. Функции $\lambda_{j,g}$ имеют вид:

$$\lambda_{1w} = \lambda_{0,1}(\xi) \lambda_{0,1}(\eta); \quad \lambda_{2, w} = \lambda_{0,2}(\xi) \lambda_{0,1}(\eta);$$

$$\lambda_{1, \alpha} = b\lambda_{0,1}(\xi) \lambda_{1,1}(\eta); \quad \lambda_{2, \alpha} = b\lambda_{0,2}(\xi) \lambda_{1,1}(\eta);$$

$$\lambda_{1, \beta} = -a\lambda_{1,1}(\xi) \lambda_{0,1}(\eta); \quad \lambda_{2, \beta} = -a\lambda_{1,2}(\xi) \lambda_{0,1}(\eta);$$

$$\lambda_{3, w} = \lambda_{0,1}(\xi) \lambda_{0,2}(\eta); \quad \lambda_{4, w} = \lambda_{0,2}(\xi) \lambda_{0,2}(\eta);$$

$$\lambda_{3, \alpha} = b\lambda_{0,1}(\xi) \lambda_{1,2}(\eta); \quad \lambda_{4, \alpha} = b\lambda_{0,2}(\xi) \lambda_{1,2}(\eta);$$

$$\lambda_{3, \beta} = -a\lambda_{1,1}(\xi) \lambda_{0,2}(\eta); \quad \lambda_{4, \beta} = -a\lambda_{1,2}(\xi) \lambda_{0,2}(\eta),$$

где $\lambda_{0,1}(\xi) = 1 - 10\xi^2 + 30\xi^3 - 35\xi^4 + 14\xi^5;$

$$\lambda_{0,2}(\xi) = 10\xi^2 - 30\xi^3 + 35\xi^4 - 14\xi^5;$$

$$\lambda_{1,1}(\xi) = \xi - 8\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 7\xi^5;$$

$$\lambda_{1,2}(\xi) = -2\xi^2 + 10\xi^3 - 15\xi^4 + 7\xi^5.$$

Функции $\lambda_{j,g}$ совместны, поскольку совместны одномерные функции. Непосредственная проверка показывает, что функции $\lambda_{j,g}$ удовлетворяют тождествам полноты при $m=1$ и условию 3 теоремы при $t_1=2$.

В силу непрерывности функций (1.25) нужно проверять только равенства

$$\int_0^1 \int_0^1 x^T D^s (\varphi_{j,g} - \lambda_{j,g}) = 0 \quad |\tau| \leq 1$$

при $s = (2,0)$ и $s = (0,2)$. При $s = (1,1)$ проверка не нужна в силу непрерывности функций $\varphi_{j,g}$.

Следовательно, $t=2$ и имеет место оценка погрешности

$$\|u - u_h\|_A \leq ch^2.$$

Проверим выводы численным экспериментом. На основе этого конечного элемента была рассчитана плита (см. рис. 1.4) с последовательным сгущением расчетной сетки. Результаты расчета приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Номера точек	Индекс перемещения или усилия	Точное решение	Решение по МКЭ при расчетной сетке		
			4×4	8×8	16×16
1	W	12,79308	13,616	13,002	12,845
2	W	17,62905	18,736	17,908	17,693
3	W	24,37410	25,900	24,759	24,470
1	$M_x = M_y$	11,32153	12,174	11,549	11,378
2	M_x	13,63197	14,104	13,757	13,663
2	M_y	15,03546	16,354	15,380	15,121
3	$M_x = M_y$	18,41783	19,334	18,664	18,480

Примечание. Перемещения даны в мм, а моменты — в тс·м.

Как видно из таблицы, порядок сходимости как для перемещений, так и для моментов равен h^2 , так как с удвоением сетки погрешность (разность между точным и приближенным решением) убывает в 4 раза.

Подобные исследования треугольного несовместного конечного элемента плиты с шестью степенями свободы (в вершинах треугольника вводится по одной степени свободы — вертикальное перемещение, а по серединам сторон — угол поворота ортогональный стороне) показали, что требование теоремы не удовлетворяется, следовательно, использование такого элемента некорректно.

Конструирование треугольного несовместного конечного элемента с тремя степенями свободы в узле. Для построения функций $\lambda_{j,g}$ рассмотрим треугольный конечный элемент Купера (с шестью степенями свободы в узле). Они совместны и полны. Выделим те из форм перемещений, которые соответствуют нуж-

ным нам степеням свободы (остальные отбросим). Такие КЭ останутся совместными, но не будут полными. Их аппроксимирующие функции $\lambda_{j,g}$ подставим в условие полноты. Получим невязки T_γ , $|\gamma|=2$, являющиеся линейными комбинациями функций:

$$\begin{aligned}x_1 &= x(1-x)^2; \quad x_2 = y^2(1-y)^2; \\x_3 &= 3x^2y - 2x^3y + 3xy^2 - 2xy^3 - 3x^2y^2 - xy.\end{aligned}$$

Равенства $a_\tau(x^\tau, T_\gamma(x)) = 0$, $|\tau|=2$ выполняются в силу свойств функций x_1, x_2, x_3 .

Изменим выбранные аппроксимирующие функции так, чтобы выполнялись условия полноты (решаем систему относительно $\varphi_{j,g} - \lambda_{j,g}$). При этом нарушится совместность (в узлах совместность сохранится). Однако требуемое в теореме о сходимости условие 3 будет выполнено при $t_1=1$. Для удобства приведенные построения выполняются для равнобедренного прямоугольного треугольника Δ_0 (рис. 1.5). Аппроксимирующие функции на Δ_0 имеют вид:

$$\varphi_{1,W}^0 = \lambda_{1,W}^0 + x_1 + x_2 - 2x_3; \quad \varphi_{1,\beta}^0 = -\lambda_{1,\beta}^0 - x_1;$$

$$\varphi_{1,\alpha}^0 = \lambda_{1,\alpha}^0 + x_1; \quad \varphi_{2,W}^0 = \lambda_{2,W}^0 - x_1 + x_3;$$

$$\varphi_{2,\beta}^0 = -\lambda_{2,\beta}^0 + \frac{x_3}{2}; \quad \varphi_{2,\alpha}^0 = \lambda_{2,\alpha}^0 - \frac{x_3}{2};$$

$$\varphi_{3,W}^0 = \lambda_{3,W}^0 - x_2 + x_3; \quad \varphi_{3,\beta}^0 = -\lambda_{3,\beta}^0 + \frac{x_3}{2};$$

$$\varphi_{3,\alpha}^0 = \lambda_{3,\alpha}^0 - \frac{x_3}{2},$$

где

$$\lambda_{1,W}^0 = 1 - 10(x^3 + y^3) + 15(x^4 + y^4) - 6(x^5 + y^5) + 2R_1\theta_1 + 2R_2\theta_2 - 30\theta_3;$$

$$\lambda_{2,W}^0 = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5 - 2R_1\theta_2 + (15 - 2R_3)\theta_3;$$

$$\lambda_{3,W}^0 = 10y^3 - 15y^4 + 6y^5 - 2R_2\theta_2 + (15 + 2R_3)\theta_3;$$

$$\lambda_{1,\beta}^0 = x - 6x^3 + 8x^4 - 3x^5 + 2xy^3 - 3xy^2 + 3x^3y^2 + R_1\theta_1 - 6\theta_3;$$

$$\lambda_{2,\beta}^0 = -4x^3 + 7x^4 - 3x^5 + R_1\theta_1 + \left(R_3 - \frac{15}{2}\right)\theta_3;$$

$$\lambda_{3,\beta}^0 = -2xy^3 + 3xy^2 - 3x^3y^2 + \left(R_3 - \frac{3}{2}\right)\theta_3;$$

$$\lambda_{1,\alpha}^0 = y - 6y^3 + 8y^4 - 3y^5 + 2x^3y - 3x^2y + 3x^2y^3 + R_2\theta_2 - 6\theta_3;$$

$$\lambda_{2,\alpha}^0 = -2x^3y + 3x^2y - 3x^2y^3 - \left(R_3 + \frac{3}{2}\right)\theta_3;$$

$$\lambda_{3,\alpha}^0 = -4y^3 + 7y^4 - 3y^5 + R_2\theta_2 - \left(R_3 + \frac{15}{2}\right)\theta_3;$$

$$\theta_1 = -x^2y + 2x^3y + 2x^2y^2 - x^4y - 2x^3y^2 - x^2y^3;$$

$$\theta_2 = -xy^2 + 2xy^3 + 2x^2y^2 - xy^4 - 2x^2y^3 - x^3y^2;$$

$$\theta_3 = x^2y^2(1 - x - y)$$

$$\text{при } R_1 = 15 \cdot \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_1^2 + b_1^2}, \quad R_2 = 15 \cdot \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

$$R_3 = 15 \cdot \frac{a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2}{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

На произвольном треугольнике Δ (рис. 1.6) аппроксимирующие функции имеют вид:

$$\varphi_{j,w} = \varphi_{j,w}^0; \quad \varphi_{j,\beta} = a_1\varphi_{j,\beta}^0 + a_2\varphi_{j,\alpha}^0;$$

$$\varphi_{j,\alpha} = b_1\varphi_{j,\beta}^0 + b_2\varphi_{j,\alpha}^0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Построенные КЭ* удовлетворяют условиям теоремы Евзерова при $t=1$. Следовательно, она обеспечивает оценку погрешности

$$\|u - u_h\| \leq ch.$$

Для проверки построенных аппроксимирующих функций был поставлен численный эксперимент. Рассчитывалась плита, показанная на рис. 1.4.

Два варианта расчетной сетки (условно 4×4 и 8×8) для четверти плиты показаны на рис. 1.7. В табл. 1.4 приведены результаты эксперимента, которые подтверждают сходимость построенного элемента.

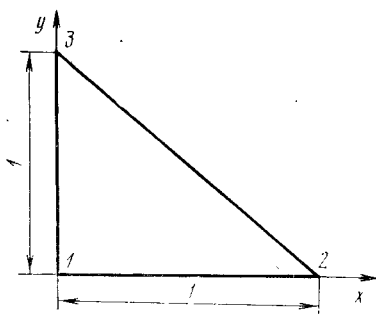


Рис. 1.5

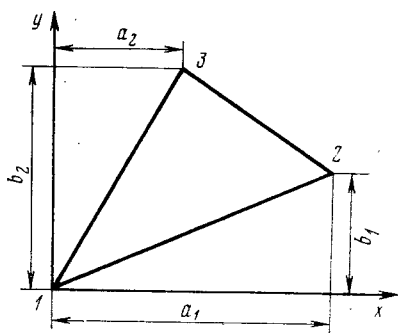


Рис. 1.6

* Более подробно конструирование этого конечного элемента (КЭ) описано в работе [24].

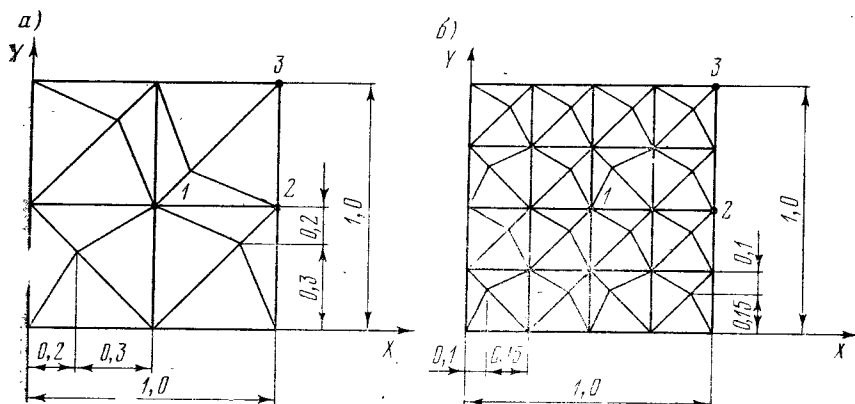


Рис. 1.7

Таблица 1.4

Номера точек	Индекс перемещения или усилия	Точное решение	Решение по МКЭ при расчетной сетке		
			4×4	8×8	16×16
1	W	12,79308	12,8033	12,79558	12,79370
2	W	17,62905	17,7305	17,6709	17,6381
3	W	24,37410	24,8879	24,5044	24,4055
1	$M_x = M_y$	11,32153	11,9476	11,4347	11,3786
2	M_x	13,63197	14,5188	13,8408	13,7004
2	M_y	15,03546	16,0416	15,2446	15,1002
3	$M_x = M_y$	18,41783	19,2885	18,8813	18,6136

Примечание. Перемещения даны в мм, а усилия — в тс/м².

1.4. Сравнение различных типов конечных элементов

При решении практических задач часто возникают вопросы, связанные с выбором типа элемента. Ведь для решения одной и той же задачи (например, изгиба плиты) существует целый набор конечных элементов, имеющих различные свойства. На рис. 1.8 дана графическая интерпретация приближений перемещений и момента в центральной точке плиты (узел 3 на рис. 1.4) для трех типов элементов:

кривая 1, соответствующая решению на основе совместного конечного элемента Богнера — Фокса — Шмита;

кривая 2 — решению на основе несовместного конечного элемента Клафа;

кривая 3 — решению на основе совместного конечного элемента Пшеменицкого, описанного в работе [85] и рекомендуемого в некоторых публикациях для практических расчетов. Этот прямоугольный элемент плиты имеет три степени свободы в узле,

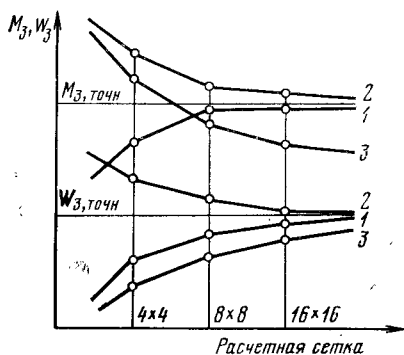


Рис. 1.8

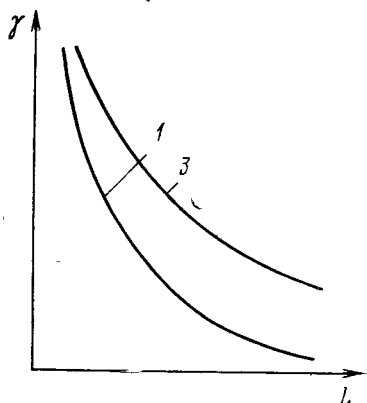


Рис. 1.9

и его координатные функции образуются из системы функций (1.23) путем исключения полиномов $\varphi_{j,\gamma}$. Нетрудно установить, что этот элемент не удовлетворяет условиям полноты, так как для необходимого порядка аппроксимации $p=2$ необходимо удовлетворить первые шесть тождеств (1.24), а в них уже входят полиномы $\varphi_{j,\gamma}$.

Анализируя график (см. рис. 1.8), видим, что решение 3, полученное на основе элемента Пшеменицкого, сходится к состоянию, достаточно далеко отстоящего от действительного. Это может ввести в заблуждение исследователей, оперирующих только результатами численных исследований. Кроме того, этот результат еще раз свидетельствует, что удовлетворение требованиям полноты обязательно. Решения, полученные на основе элементов Богнера — Фокса — Шмита 1 и Клафа 2, сходятся к точному решению.

Решение 1 имеет сходимость снизу, что не противоречит известному утверждению о сходимости снизу для совместных элементов. С физической точки зрения это объясняется тем, что введение аппроксимирующих функций можно расценивать как введение определенных связей, которые ожесточают систему. Решение 2 в данном случае имеет сходимость сверху. Это можно объяснить тем, что хотя введение аппроксимирующих функций ожесточает систему, наличие разрывов для несовместных элементов означает снятие определенных связей по границам элементов. В связи с этим, для несовместных элементов может наблюдаться сходимость как сверху (как в данном случае), так и снизу. Интересным может оказаться сравнение точности расчета для этих двух элементов. Такое сравнение для одной и той же сетки недостаточно объективно, так как в этом случае лучшее приближение для элемента 1 может объясниться просто большим количеством степеней свободы.

С практической же точки зрения важно сравнение точности при одном и том же числе степеней свободы для всей системы. График (рис. 1.9), на котором по оси ординат откладывается квадратичная невязка γ , а по оси абсцисс — число степеней свободы L , свидетельствует о том, что в этом смысле элемент Богнера — Фокса — Шмита более приемлем, чем элемент Клафа.

Приведенное сравнение в какой-то мере отвечает на вопрос: использовать ли элементы с повышенным порядком аппроксимации и с большим числом степеней свободы в узле либо ориентироваться на более простые элементы? В большинстве случаев, особенно при решении больших задач, предпочтение следует отдавать первым элементам, так как они дают возможность достичь необходимой точности при меньшем порядке L разрешающей системы алгебраических уравнений (1.5). Это очень важно, так как при увеличении L обусловленность матрицы K ухудшается, а это может привести к невозможности достижения заданной точности, хотя порядок аппроксимации для используемых типов элементов может обуславливать эту точность. Критерием обусловленности матрицы K может служить спектральное число обусловленности $a(K)$. Чем хуже обусловленность, тем больше $a(K)$. В работе [63] дается оценка $a(K)$, которая при равномерной сетке имеет вид:

$$a(K) = h^{-2m}. \quad (1.26)$$

Из оценки (1.26) видно, что при конкретных расчетах больших задач лучше использовать элементы с большими h (т. е. надо избегать чрезмерно густых расчетных сеток), а заданную точность достигать за счет более высокого порядка аппроксимации. Следует отметить, что на обусловленность влияют и факторы, связанные с процессом интерполяции на элементе. Так, в работе [63] решение плоской задачи теории упругости при линейной интерполяции на треугольнике оценивается:

$$a(K) \approx \frac{1}{\sin^3 \alpha_{\min}} h^{-2}, \quad (1.27)$$

где $\alpha_{\min}$ — минимальный угол треугольника.

Из (1.27) видно, что при $\alpha_{\min} \rightarrow 0$ обусловленность неограниченно ухудшается. Для прямоугольной сетки аналогом $\alpha_{\min}$ является отношение меньшей стороны элемента к большей. Поэтому при назначении расчетной сетки предпочтение нужно отдавать равносторонним элементам.

1.5. Связь с методами строительной механики стержневых систем

Систему уравнений (1.5) $Kq - p = 0$ можно трактовать как уравнение равновесия. Ее аналогом в строительной механике стержневых систем является каноническая система уравнений

метода перемещений. Выражение (1.8) для получения компонентов матрицы жесткости было получено из функционала Лагранжа, однако его можно получить и из принципа возможных перемещений, как это практикуется в строительной механике стержневых систем, т. е.

$$K_{lj,r} = \int_{\Omega_r} \varepsilon'_l \sigma_j d\Omega_r,$$

где $\varepsilon'_l \sigma_j$ — деформации (напряжения) элемента, соответствующие единичному значению $l(j)$ степени свободы.

Выражение (1.9) для получения компонентов вектора $\mathbf{P}$ в строительной механике стержневых систем трактуется как процедура приведения местной нагрузки к узловой.

Таким образом, процедура решения задачи по МКЭ полностью соответствует методам строительной механики стержневых систем. Некоторое отличие можно проследить только в процедуре составления матрицы жесткости: для МКЭ всегда используется формула (1.8), для стержневых систем матрица жесткости часто строится из других соображений. Правда, стержневые системы имеют одну особенность: гипотеза плоских сечений, лежащая в основе их расчета, с одной стороны, обуславливает совместность конечных элементов, с другой стороны, порождает дифференциальный оператор задачи. Поэтому здесь появляется возможность подобрать такие координатные функции, которые, с одной стороны, являются решением однородного дифференциального уравнения, с другой стороны, дают возможность построить совместные конечные элементы. МКЭ в этом случае для стержневых систем будет точным методом.

Вместе с тем можно привести примеры, когда есть смысл для стержневых систем использовать приближенные аппроксимирующие функции. Рассмотрим стержень, работающий в условиях стесненного кручения. Дифференциальное уравнение, описывающее напряженное состояние стержня, в этом случае имеет вид:

$$-EI_w \frac{d^4 \theta}{dx^4} + GI_k \frac{d^2 \theta}{dx^2} = f.$$

Выражение потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_a \left[GI_k \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + EI_w \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 \right] dx.$$

В каждом узле стержня примем две степени свободы (θ_i — угол закручивания, β_i — деформация сечения) и систему аппроксимирующих функций:

$$\theta(x) = X_1 \theta_1 + X_2 \theta_2 + X_3 \beta_1 + X_4 \beta_2, \quad (1.28)$$

где X_1, X_2, X_3, X_4 — аналогичны (1.23).

Как легко убедиться, (1.28) не является точным решением дифференциального уравнения задачи, которое имеет вид:

$$\theta(x) = A_1 + A_2 x + A_3 \operatorname{sh} \alpha x + A_4 \operatorname{ch} \alpha x,$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{GI_k}{EI_w}}$.

Используя стандартную процедуру МКЭ, построим матрицу жесткости (табл. 1.5), в которой обозначим: q — степени свободы; σ — обобщенные напряжения (усилия); $M\beta$, M — бимоменты и крутящий момент, возникающие в узловых сечениях стержня; $G = GI_k$, $D = EI_w$ — крутящий и секториальный момент инерции сечения. Полученная матрица жесткости отличается от известной в строительной механике стержневых систем.

Выясним сходимость МКЭ с использованием аппроксимирующих полиномов (1.28) и оценим погрешность на основе изложенной методики (см. п. 1.2). Выясним, удовлетворяют ли функции (1.28) требованиям, предъявляемым к координатным функциям МКЭ.

1. Функция принадлежит к энергетическому пространству H_A , так как она обеспечивает непрерывность первых производных от Θ как по области элементов, так и по границам между элементами, что обусловлено общностью $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ для двух смежных элементов (степень свободы β).

2. Нетрудно убедиться, что функции (1.28) линейно независимы, так как $\Theta(x) = 0$ только в случае $\Theta_1 = \Theta_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$.

3. Покажем, что система функций, построенная на основе (1.28), полна в пространстве H_A . Для выполнения условия типа (1.24) с $p=2$ (порядок дифференциального оператора данной за-

Таблица 1.5
(матрица)

$\sigma \backslash q$	θ_1	β_1	θ_2	β_2
M_1	$\frac{6}{5} \frac{c}{a} + 12 \frac{D}{a^3}$	$\frac{11}{10} c + 6 \frac{D}{a^2}$	$-\frac{6}{5} \frac{c}{a} - 12 \frac{D}{a^3}$	$\frac{1}{10} c + 6 \frac{D}{a^2}$
$M\beta_1$	Симметрично		$\frac{17}{15} ca + 4 \frac{D}{a}$	$-\frac{11}{10} c - 6 \frac{D}{a^2}$
M_2			$-\frac{1}{30} ca + 2 \frac{D}{a}$	
$M\beta_2$			$\frac{6}{5} c + 12 \frac{D}{a^3}$	$-\frac{1}{10} c - 6 \frac{D}{a^2}$
				$\frac{17}{15} ca + 4 \frac{D}{a}$

дачи $2m=4$) для принятой системы функций согласно (1.12) необходимо выполнение следующих тождеств:

$$X_1 + X_2 \equiv 1; \quad aX_2 + X_3 + X_4 \equiv x;$$

$$\frac{a^2}{2} X_2 + aX_4 \equiv \frac{x^2}{2}; \quad \frac{a^3}{6} X_2 + \frac{a^2}{2} X_4 \equiv \frac{x^3}{6}.$$

Для функций (1.28) эти тождества справедливы. Таким образом, выбранные функции удовлетворяют всем трем требованиям и, следовательно, для приближенного решения задачи справедлива оценка (1.15), т. е.

$$\|\theta - \theta_h\|_{h_2} \leq ca^4,$$

где θ_h — приближенное решение задачи; θ — то же, точное.

Подобную методику с использованием приближенных аппроксимирующих функций можно было бы выполнить для стержня на упругом основании. В ряде случаев это оказывается более удобным, чем применение точных формул, которые, как правило, громоздки, содержат особые точки и имеют другие неудобства при практической реализации.

Таким образом, глубокая связь МКЭ с методами строительной механики стержневых систем может оказать взаимное положительное влияние. С одной стороны, МКЭ может использовать богатый опыт методов расчета стержневых систем, с другой стороны, в необходимых случаях имеется возможность проводить приближенное построение матриц жесткости стержней с использованием приемов МКЭ с последующей оценкой сходимости на основе хорошо разработанного математического аппарата МКЭ.

ГЛАВА 2

ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

2.1. Схема решения задач

Можно выделить пять основных этапов решения задач по МКЭ: расчленение системы на КЭ и выбор координатных функций; построение матриц жесткости и приведение местной нагрузки к узловой для каждого КЭ; построение канонических уравнений; решение канонических уравнений и определение значений степеней свободы; определение компонентов напряженно-деформированного состояния (перемещений, напряжений) по области элемента.

Расчленение системы на конечные элементы — задача по своей сути близкая к нанесению расчетной сетки в методе конечных

разностей или в вариационно-разностном методе. Здесь необходимо удовлетворить двум противоречивым требованиям: точности расчета, которая требует большего количества расчетных узлов (большей густоты расчетной сетки), и практическому решению задачи, которое накладывает ограничение на число решаемых уравнений типа (1.5), а следовательно, и на число расчетных узлов.

Построение матриц жесткости и приведение местной нагрузки к узловой осуществляется по формулам (1.8) и (1.9). Построение компонентов $k_{ij,r}$ и $p_{i,r}$ дается в местной системе координат, которая выбирается таким образом, чтобы максимально упростить эту процедуру. Обычно начало местной системы координат располагается в одном из узлов, а направления осей по возможности совмещаются с гранями конечного элемента. Матрица жесткости, а также узловые усилия и перемещения переводятся из местной системы координат в общую (относительно которой составляется общая матрица жесткости $\mathbf{K}$) при помощи матрицы направляющих косинусов. По своему характеру эта процедура примыкает к алгоритмизации задачи (см. гл. 4).

Для составления канонических уравнений используются формулы (1.7). Канонические уравнения решаются известными методами решения линейных алгебраических уравнений высоких порядков, так как число степеней свободы при решении сложных задач может достигать нескольких десятков тысяч. Обычно используются метод Гаусса, метод квадратного корня (метод Халецкого), метод Зейделя и другие прямые или итерационные методы. В результате решения определяются значения степеней свободы. По найденному вектору степеней свободы q и системе координатных функций $\{\varphi_i\}$, которая была назначена заранее, определяется функция перемещений (1.4) по всей области системы, а по ней — напряжения и деформации в интересующих расчетчика местах.

Описанная процедура достаточно традиционна и совершенно инвариантна к классу рассчитываемых конструкций. Исключением является процедура составления матрицы жесткости, которая обусловлена типом выбранных координатных функций и зависит от выражения для потенциальной энергии системы, т. е. вида матриц $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, векторов σ , ε , u . Поэтому дальнейшее рассмотрение использования МКЭ к различным классам задач будет сводиться к построению матриц жесткости для различных элементов.

2.2. Стержневые системы

Введение гипотезы плоских сечений дает возможность описать напряженно-деформированное состояние стержня в рамках одномерной задачи.

При пренебрежении сдвиговой податливостью выражение для потенциальной энергии стержневой системы имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \left(M_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + M_z \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + M_x \theta + Q_z \frac{\partial u_z}{\partial x} + \right. \\ \left. + Q_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + N \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx, \quad (2.1)$$

где u — вектор перемещений, включающий u_x, u_y, u_z, θ (рис. 2.1); u_x, u_y, u_z — перемещения вдоль осей x, y, z ; θ — угловое перемещение относительно оси x ;

$$M_y = EI_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}; \quad M_z = EI_z \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}; \quad M_x = GI_{\text{кр}} \theta$$

— моменты, действующие в сечении относительно осей x, y, z ;

$$N = EF \frac{\partial u_x}{\partial x} \text{ — нормальная сила в сечении; } Q_z = GF_z \frac{\partial u_z}{\partial x},$$

$$Q_y = GF_y \frac{\partial u_y}{\partial x} \text{ — перерезывающие силы в сечении.}$$

Как правило, при расчете стержневых систем влиянием сдвиговой податливости пренебрегают, т. е. вклад Q_z и Q_y в потенциальную энергию системы не учитывают.

Для аппроксимации u_x и θ используются линейные полиномы, т. е.:

$$u_x(x) = \frac{(a-x)}{a} U_1 + \frac{x}{a} U_2; \quad \theta(x) = \frac{(a-x)}{a} \alpha_1 + \frac{x}{a} \alpha_2, \quad (2.2)$$

где $U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2$ — степени свободы, соответствующие линейным перемещениям вдоль оси x и углам поворота относительно этой же оси в начале (первый узел) и конце (второй узел) стержня.

Поскольку в функционал входят вторые производные по u_z и u_y , то для обеспечения их существования необходима аппроксимация более высокого порядка. В данном случае используются полиномы типа (1.23), т. е.:

$$\left. \begin{aligned} u_z &= X_1 W_1 + X_2 W_2 + X_3 \beta_1 + X_4 \beta_2; \\ u_y &= X_1 V_1 + X_2 V_2 + X_3 \gamma_1 + X_4 \gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где X_1, X_2, X_3, X_4 — полиномы типа (1.23); $V_1, V_2, \beta_1, \beta_2$ — перемещения вдоль оси y и углы поворота относительно этой же оси в начале и конце стержня; $W_1, W_2, \gamma_1, \gamma_2$ — перемещения вдоль оси z и углы поворота относительно этой же оси в начале и конце стержня.

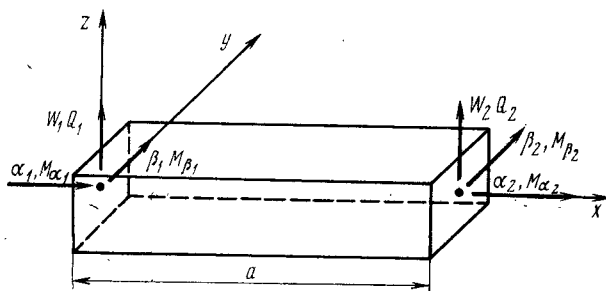


Рис. 2.1

Гипотеза плоских сечений, с одной стороны, лежит в основе дифференциальных уравнений стержневых систем, с другой стороны, автоматически обеспечивает совместность одномерных конечных элементов. Поэтому если аппроксимирующие функции являются решением однородного дифференциального уравнения, а функции (2.1) и (2.3) удовлетворяют этому требованию, то на основе МКЭ в этом случае можно получить точное решение.

Используя выражение для потенциальной энергии (2.1) и принятую аппроксимацию (2.1) и (2.3), по формуле (1.8) строится матрица жесткости стержня (табл. 2.1). Интегрирование ведется по одномерной области с пределами 0, a (см. рис. 2.1).

В табл. 2.1 принято:

$$a_1 = \frac{EF}{a}; \quad a_2 = \frac{12EI_z}{a^3}; \quad a_3 = \frac{12EI_z}{a^3}; \quad a_4 = \frac{GI_{кр}}{a}; \quad a_5 = \frac{4EI_y}{a};$$

$$a_6 = \frac{4EI_z}{a}; \quad a_7 = \frac{6EI_z}{a^2}; \quad a_8 = \frac{6EI_y}{a^2}; \quad a_9 = 0,5a_5; \quad a_{10} = 0,5a_6.$$

Так как аппроксимация всех членов вектора U независима, то из матрицы жесткости для общего случая (см. табл. 2.1) легко получить матрицы жесткости для различных частных случаев:

Таблица 2.1
(матрица)

U_1	V_1	W_1	α_1	β_1	γ_1	U_2	V_2	W_2	α_2	β_2	γ_2	Степени свободы
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Узловых усилий
a_1												1
	a_2											2
		a_3										3
			a_4									4
				a_5								5
					a_6							6
						a_7						7
							a_8					8
								a_9				9
									a_{10}			10
										a_{11}		11
											a_{12}	12

- 1) для шарнирного стержня элементы:
 вектора узловых реакций — R_1, R_7 ;
 вектора степеней свободы — q_1, q_7 ;
 матрицы жесткости — K_{11}, K_{17}, K_{77} ;
- 2) для изгибаемого стержня (элемент ростверка в плоскости XOY) элементы:
 вектора узловых реакций — $R_3, R_4, R_5, R_9, R_{10}, R_{11}$;
 вектора степеней свободы — $q_3, q_4, q_5, q_9, q_{10}, q_{11}$;
 матрицы жесткости — $K_{33}, K_{35}, K_{39}, K_{311}, K_{44}, K_{410}$;
 $K_{55}, K_{59}, K_{511}, K_{99}, K_{911}, K_{1010}, K_{1111}$;
- 3) для сжато(растянуто)-изгибаемого стержня (элемент рамной стержневой системы в плоскости XOZ) элементы:
 вектора узловых реакций — $R_1, R_3, R_5, R_7, R_9, R_{11}$;
 вектора степеней свободы — $q_1, q_3, q_5, q_7, q_9, q_{11}$;
 матрицы жесткости — $K_{11}, K_{17}, K_{33}, K_{35}, K_{39}, K_{311}$;
 $K_{55}, K_{59}, K_{511}, K_{77}, K_{99}$;
 K_{910}, K_{1111} .

2.3. Пластиначные системы (плоское напряженное состояние)

Теория плоского напряженного состояния основана на гипотезе, допускающей отсутствие напряжений, нормальных к срединной плоскости пластинки.

Вектор перемещений u , вектор деформаций ε , вектор напряжений σ , вектор внешней нагрузки f , матрица дифференцирования B и матрица упругости D имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u^T &= (u_x, u_y); \quad \varepsilon^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}); \\
 \sigma^T &= (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}); \quad f^T = (p_x, p_y); \\
 B &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} \end{bmatrix} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

где u_x, u_y, p_x, p_y — перемещения и внешняя нагрузка по направлению осей x, y ; E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Для решения задач плоского напряженного состояния наиболее употребительны треугольный и прямоугольный конечные элементы, имеющие по две степени свободы в узле и независимую аппроксимацию перемещений u_x и u_y .

Треугольный конечный элемент плоского напряженного состояния. В неявном виде аппроксимирующие функции перемещений принимаются в виде линейных полиномов:

$$u_x(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y; \quad u_y(x, y) = a_4 + a_5x + a_6y.$$

В явном виде аппроксимирующие функции имеют вид:

$$u_x(x, y) = (a_1 + b_1x + c_1y)U_1 + (a_2 + b_2x + c_2y)U_2 + (a_3 + b_3x + c_3y)U_3;$$

$$u_y(x, y) = (a_1 + b_1x + c_1y)V_1 + (a_2 + b_2x + c_2y)V_2 + (a_3 + b_3x + c_3y)V_3;$$

$$a_1 = \frac{1}{\Delta} \left| \begin{array}{cc} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{array} \right|; \quad b_1 = -\frac{1}{\Delta} \left| \begin{array}{cc} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{array} \right|; \quad c_1 = \frac{1}{\Delta} \left| \begin{array}{cc} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{array} \right|,$$

где $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$ — степени свободы (рис. 2.2); Δ — удвоенная площадь треугольника.

Значения a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 и c_3 определяются с помощью круговой перестановки индексов узлов.

Аппроксимирующие функции обеспечивают совместность конечных элементов и порядок аппроксимации $p=1$. Для оценки приближенного решения задачи на их основе справедливы оценки (1.13) — (1.17), т.е. средняя квадратичная оценка напряжений имеет порядок h , а перемещений h^2 (порядок дифференциального оператора задачи в данном случае $2m=2$).

В табл. 2.2 приведена матрица жесткости, которая получена на основе прямых аппроксимирующих функций и выражений

Таблица 2.2

(матрица)

U_1	V_1	U_2	V_2	U_3	V_3	Степени свободы / Узловые усилия
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$-a_6$	Q_{x_1}
	a_7	a_8	a_9	$-a_{10}$	a_{11}	Q_{y_1}
		a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_6	Q_{x_2}
	Симметрично		a_{15}	a_{10}	a_{16}	Q_{y_2}
	Все члены матрицы			a_{17}	0	Q_{x_3}
	умножаются на $\frac{E}{1-\mu^2}$				a_{18}	Q_{y_3}

(1.8) и (2.4). Для упрощения выражения местная система координат выбрана так (см. рис. 2.2), чтобы

$$x_1 = y_1 = y_2 = 0.$$

В табл. 2.2. принято:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{c}{a} + (1-\mu) \left(\frac{b^2}{2a} + \frac{a}{2} - b \right) \frac{1}{c} \right]; & a_2 &= \frac{1}{4} (1+\mu) \left(1 - \frac{b}{a} \right); \\
 a_3 &= \frac{1}{2} \left[(1-\mu) \left(1 - \frac{b}{a} \right) \frac{b}{2c} - \frac{c}{a} \right]; & a_4 &= \frac{1}{4} \left[\frac{b}{a} (1+\mu) - (1-\mu) \right]; \\
 a_5 &= \frac{1}{4c} (1-\mu) (b-a); & a_6 &= \frac{\mu}{2}; & a_7 &= \left[\frac{1}{c} \left(\frac{b^2}{2a} - b + \frac{a}{2} \right) + \frac{c}{4a} (1-\mu) \right]; \\
 a_8 &= \frac{1}{2} \left[(1+\mu) \frac{b}{2a} - \mu \right]; & a_9 &= \frac{1}{2} \left[\frac{b}{c} \left(1 - \frac{b}{a} \right) - \frac{c}{2a} (1-\mu) \right]; \\
 a_{10} &= \frac{1}{4} (1-\mu); & a_{11} &= \frac{1}{2c} (b-a); & a_{12} &= \frac{1}{2a} \left[c + \frac{b^2}{2c} (1-\mu) \right]; \\
 a_{13} &= -\frac{b}{4a} (1+\mu); & a_{14} &= -\frac{b}{4c} (1-\mu); & a_{15} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{b^2}{c} + \frac{c}{2} (1-\mu) \right]; & a_{16} &= -\frac{b}{2c}; \\
 a_{17} &= \frac{a}{4c} (1-\mu); & a_{18} &= \frac{a}{2c}.
 \end{aligned}$$

Прямоугольный конечный элемент плоского напряженного состояния. Для этого элемента приведены (см. п. 1.3) аппроксимирующие функции (1.20) и исследован порядок сходимости, который совпадает с треугольным элементом. Вместе с тем численные эксперименты показывают, что решение, полученное на основе прямоугольного элемента, гораздо ближе к точному, чем на основе треугольного. Это объясняется наличием в аппроксимирующем полиноме для прямоугольного элемента члена xy , что обуславливает переменные значения деформаций и напряжений по области Ω_r , в то время как у треугольного элемента они постоянны.

Матрица жесткости прямоугольного элемента (рис. 2.3) получается на основе (1.8), (1.20), (2.4) и приведена в табл. 2.3.

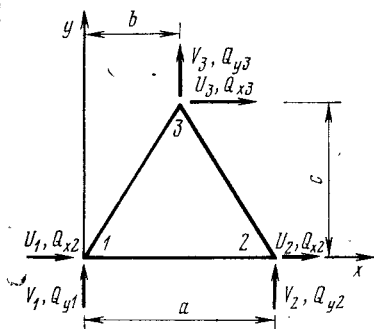


Рис. 2.2

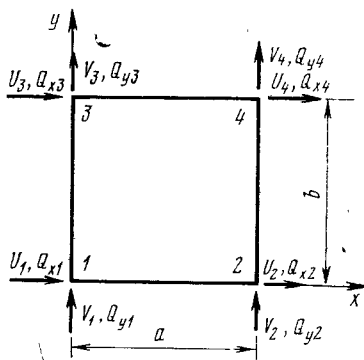


Рис. 2.3

Таблица 2.3

(матрица)

U_1	V_1	U_3	V_3	U_5	V_5	U_7	V_7	Степени свободы / Узловые усилия
a_1	a_3	a_5	$-a_4$	a_9	a_4	a_7	$-a_3$	Q_{x_1}
	a_2	a_4	a_3	$-a_4$	a_{10}	$-a_3$	a_8	Q_{y_1}
		a_1	$-a_3$	a_7	a_3	a_9	$-a_4$	Q_{x_2}
			a_2	a_3	a_8	a_4	a_{10}	Q_{y_2}
				a_1	$-a_3$	a_5	a_4	Q_{x_3}
					a_2	$-a_4$	a_6	Q_{y_3}
						a_1	a_3	Q_{x_4}
							a_2	Q_{y_4}
Симметрично								
Все элементы матрицы умножаются на $\frac{Eh}{1-\mu^2}$								

В ней принято:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{b}{3a} + \frac{a}{6b}(1-\mu); & a_2 &= \frac{a}{3b} + \frac{b}{6a}(1-\mu); & a_3 &= \frac{1}{8}(\mu+1); \\
 a_4 &= \frac{1}{8}(1-3\mu); & a_5 &= -\frac{b}{3a} + \frac{a}{12b}(1-\mu); & a_6 &= \frac{a}{6b} - \frac{b}{6a}(1-\mu); \\
 a_7 &= -\frac{b}{6a} - \frac{a}{12b}(1-\mu); & a_8 &= -\frac{a}{6b} - \frac{b}{12a}(1-\mu); & a_9 &= \frac{b}{6a} - \\
 & & & & & -\frac{a}{6b}(1-\mu); & a_{10} &= -\frac{a}{3b} + \frac{b}{12a}(1-\mu).
 \end{aligned}$$

2.4. Тонкие изгибаемые плиты

Теория тонких изгибаемых плит основана на гипотезе Кирхгофа о прямых нормалях к срединной поверхности пластины и пренебрежимо малом напряжении, перпендикулярном к той же поверхности. Выражение для потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{B} \mathbf{u})^T \mathbf{D} \cdot (\mathbf{B} \mathbf{u}) d\Omega, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{u}$ — перемещения, ортогональные срединной поверхности; ε — вектор обобщенных деформаций (в данном случае кривизны); σ — вектор обобщенных напряжений (в данном случае моментов).

Векторы ε, σ и матрицы $\mathbf{B}, \mathbf{D}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^T &= (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}); & \sigma^T &= (M_x, M_y, M_{xy}); \\
 \mathbf{D} &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\mu) \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

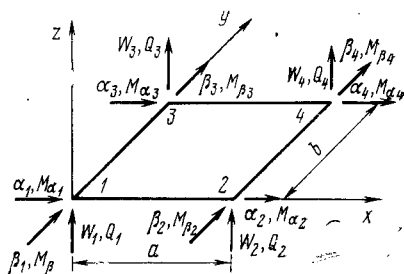


Рис. 2.4

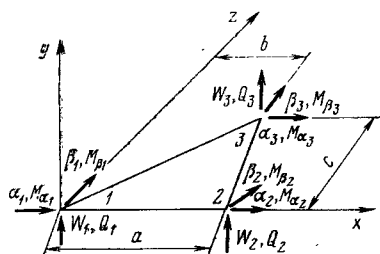


Рис. 2.5

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}.$$

где E , μ , h — модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина пластинки.

Рассмотрим наиболее употребительные элементы для расчета изгибаемых плит.

Совместный прямоугольный элемент с четырьмя степенями свободы в узле. Выше (см. п. 1—3) приведены аппроксимирующие функции (1.22) для этого совместного конечного элемента (рис. 2.4) и исследован порядок сходимости, который для напряжений равен h^2 , а для перемещений h^4 . Матрица жесткости этого элемента, полученная на основе (1.8), (1.22), (2.5), приведена в табл. 2.4, в которой принято:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{156}{35} (\gamma + \tau) + 2,88; \quad a_2 = \left(\frac{4}{35} \gamma + \frac{52}{35} \tau + 0,32 \right) b^2; \quad a_3 = \left(\frac{52}{35} \gamma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{35} \tau + 0,32 \right) a^2; \quad a_4 = \left(\frac{22}{35} \gamma + \frac{78}{35} \tau + 0,24 + 1,2\mu \right) b; \\ a_5 &= \left(-\frac{78}{35} \gamma - \frac{22}{35} \tau - 0,24 - 1,2\mu \right) a; \quad a_6 = \left(-\frac{11}{35} (\gamma + \tau) - 0,02 - 1,2\mu \right) ab; \\ a_7 &= -\frac{156}{35} \gamma + \frac{54}{35} \tau - 2,88; \quad a_8 = \left(-\frac{22}{35} \gamma + \frac{27}{35} \tau - 0,24 - 1,2\mu \right) b; \\ a_9 &= \left(-\frac{4}{35} \gamma + \frac{18}{35} \tau - 0,32 \right) b^2; \quad a_{10} = \left(-\frac{78}{35} \gamma + \frac{13}{35} \tau - 0,24 \right) a; \quad a_{11} = \left(-\frac{11}{35} \gamma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{13}{70} \tau - 0,02 - 0,1\mu \right) ab; \quad a_{12} = \left(\frac{26}{35} \gamma - \frac{3}{35} \tau - 0,08 \right) a^2; \quad a_{13} = \frac{54}{35} \gamma - \end{aligned}$$

Таблица 2.4
(матрица)

W_1	α_1	β_1	γ_1	W_2	α_2	β_2	γ_2	W_3	α_3	β_3	γ_3	W_4	α_4	β_4	γ_4	Степени свободы / Узловые усилия
a_1	a_4	a_5	a_{25}	a_7	a_8	a_{10}	$-a_{11}$	a_{13}	a_{14}	a_{16}	a_{17}	a_{19}	a_{20}	a_{22}	a_{23}	Q_1
	a_2	a_6	a_{26}	a_8	a_9	a_{11}	a_{29}	$-a_{14}$	a_{15}	a_{17}	a_{32}	$-a_{20}$	a_{21}	a_{23}	a_{35}	M_{α_1}
		a_3	a_{27}	$-a_{10}$	$-a_{11}$	a_{12}	a_{30}	a_{16}	$-a_{17}$	a_{18}	a_{33}	$-a_{22}$	a_{23}	a_{24}	a_{36}	M_{β_1}
			a_{28}	a_{11}	$-a_{29}$	a_{30}	a_{31}	$-a_{17}$	a_{32}	$-a_{33}$	a_{24}	a_{23}	$-a_{35}$	$-a_{36}$	a_{37}	M_{γ_1}
				a_1	a_4	$-a_5$	$-a_{25}$	a_{19}	a_{20}	$-a_{22}$	$-a_{23}$	a_{13}	a_{14}	$-a_{16}$	$-a_{17}$	Q_2
					a_2	$-a_6$	$-a_{26}$	$-a_{20}$	a_{21}	$-a_{23}$	$-a_{35}$	$-a_{14}$	a_{15}	$-a_{17}$	$-a_{32}$	M_{α_2}
						a_3	a_{27}	a_{22}	$-a_{23}$	a_{24}	a_{36}	$-a_{16}$	a_{17}	a_{18}	a_{33}	M_{β_2}
							a_{28}	$-a_{23}$	a_{35}	$-a_{36}$	a_{37}	a_{17}	$-a_{32}$	$-a_{33}$	a_{34}	M_{γ_2}
								a_1	$-a_4$	a_5	$-a_{25}$	a_7	$-a_8$	a_{10}	a_{11}	Q_3
									a_2	$-a_6$	a_{26}	$-a_8$	a_9	$-a_{11}$	a_{29}	M_{α_3}
										a_3	$-a_{27}$	$-a_{10}$	a_{11}	a_{12}	$-a_{30}$	M_{β_3}
											a_{28}	$-a_{11}$	$-a_{29}$	$-a_{30}$	a_{31}	M_{γ_3}
												a_1	$-a_4$	$-a_5$	a_{25}	Q_4
													a_2	a_6	$-a_{26}$	M_{α_4}
														a_3	$-a_{27}$	M_{β_4}
															a_{28}	M_{γ_4}

Симметрично

Все элементы матрицы умножаются на коэффициент $\frac{Eh^3}{12ab(1-\mu^2)}$

$$\begin{aligned}
& -\frac{156}{35} \tau - 2,88; \quad a_{14} = \left(-\frac{13}{35} \gamma + \frac{78}{35} \tau + 0,24 \right) b; \quad a_{15} = \left(-\frac{3}{35} \gamma + \right. \\
& \quad \left. + \frac{26}{35} \tau - 0,08 \right) b^2; \quad a_{16} = \left(-\frac{27}{35} \gamma + \frac{22}{35} \tau + 0,24 + 1,2 \mu \right) a; \\
& a_{17} = \left(-\frac{13}{70} \gamma + \frac{11}{35} \tau + 0,02 + 0,1 \mu \right) ab; \quad a_{18} = \left(\frac{18}{35} \gamma - \frac{4}{35} \tau - 0,32 \right) a^2; \\
& a_{19} = -\frac{54}{35} (\gamma + \tau) + 2,88; \quad a_{20} = \left(\frac{13}{35} \gamma + \frac{27}{35} \tau - 0,24 \right) b; \\
& a_{21} = \left(\frac{3}{35} \gamma + \frac{9}{35} \tau + 0,08 \right) b^2; \quad a_{22} = \left(-\frac{27}{35} \gamma + \frac{13}{35} \tau + 0,24 \right) a; \\
& a_{23} = \left(-\frac{13}{70} (\gamma + \tau) + 0,02 \right) ab; \quad a_{24} = \left(\frac{9}{35} \gamma + \frac{3}{35} \tau + 0,08 \right) a^2; \\
& a_{25} = \left(\frac{11}{35} (\gamma + \tau) + 0,02 + 0,2 \mu \right) ab; \quad a_{26} = \left(\frac{2}{35} \gamma + \frac{22}{105} \tau + \frac{2}{75} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{15} \mu \right) ab^2; \quad a_{27} = \left(-\frac{22}{105} \gamma - \frac{2}{35} \tau - \frac{2}{75} - \frac{2}{15} \mu \right) a^2 b; \quad a_{28} = \left(\frac{4}{105} (\gamma + \tau) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{225} \right) a^2 b^2; \quad a_{29} = \left(\frac{2}{35} \gamma - \frac{13}{105} \tau + \frac{2}{75} \right) ab^2; \quad a_{30} = \left(\frac{11}{105} \gamma + \frac{3}{70} \tau + \frac{1}{30} \mu + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{150} \right) a^2 b; \quad a_{31} = \left(\frac{2}{105} \gamma - \frac{1}{35} \tau - \frac{2}{225} \right) a^2 b^2; \quad a_{32} = \left(-\frac{3}{70} \gamma + \right. \\
& \quad \left. + \frac{11}{105} \tau - \frac{1}{30} \mu - \frac{1}{150} \right) ab^2; \quad a_{33} = \left(\frac{13}{105} \gamma - \frac{2}{35} \tau - \frac{2}{75} \right) a^2 b; \\
& a_{34} = \left(-\frac{1}{35} \gamma + \frac{2}{105} \tau - \frac{2}{225} \right) a^2 b^2; \quad a_{35} = \left(-\frac{3}{70} \gamma - \frac{13}{210} \tau - \frac{1}{150} \right) ab^2; \\
& a_{36} = \left(\frac{13}{210} \gamma + \frac{3}{70} \tau + \frac{1}{150} \right) a^2 b; \quad a_{37} = \left(-\frac{1}{70} (\gamma + \tau) + \frac{1}{450} \right) a^2 b^2; \\
& \quad \gamma = \frac{b^2}{a^2}; \quad \tau = \frac{a^2}{b^2}.
\end{aligned}$$

Несовместный прямоугольный элемент с тремя степенями свободы в узле. Выше (см. п. 1.3) приведены аппроксимирующие функции (1.25) для этого несовместного конечного элемента (см. рис. 2.4) и исследован порядок сходимости, который для напряжений и перемещений равен h^2 . Матрица жесткости этого элемента, полученная на основе (1.8), (1.25), (2.5), приведена в табл. 2.5. В ней принято:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 4(\tau + \gamma) + \frac{1}{5}(14 - \mu); \quad a_2 = \left[\frac{4\tau}{3} + \frac{4}{15}(1 - \mu) \right] b^2; \quad a_3 = \left[\frac{4\gamma}{3} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{15}(1 - \mu) \right] a^2; \quad a_4 = \left[2\tau + \frac{1}{5}(1 + 4\mu) \right] b; \quad a_5 = \left[-2\gamma - \frac{1}{5}(1 + 4\mu) \right] a;
\end{aligned}$$

Таблица 2.5

(матрица)

W_1	α_1	β_1	W_2	α_2	β_2	W_3	α_3	β_3	W_4	α_4	β_4	Степени свободы / Узловые усилия	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
a_1	a_4	a_5	a_7	a_8	a_{10}	a_{13}	a_{14}	a_{16}	a_{19}	a_{20}	a_{22}	1	Q_1
	a_2	a_6	a_8	a_9	a_{11}	$-a_{14}$	a_{15}	a_{17}	$-a_{20}$	$-a_{21}$	a_{23}	2	M_{α_1}
		a_3	$-a_{10}$	$-a_{11}$	a_{12}	a_{16}	$-a_{17}$	a_{18}	$-a_{22}$	a_{23}	a_{24}	3	M_{β_1}
			a_1	a_4	$-a_5$	a_{19}	a_{10}	$-a_{22}$	a_{13}	a_{14}	$-a_{16}$	4	Q_2
				a_2	$-a_6$	$-a_{20}$	a_{21}	$-a_{23}$	$-a_{14}$	a_{15}	$-a_{17}$	5	M_{α_2}
					a_3	a_{22}	$-a_{23}$	a_{24}	$-a_{16}$	a_{17}	a_{18}	6	M_{β_2}
						a_1	$-a_4$	a_5	a_7	$-a_8$	a_{10}	7	Q_3
							a_2	$-a_6$	$-a_8$	a_9	$-a_{11}$	8	M_{α_3}
								a_3	$-a_{10}$	a_{11}	a_{12}	9	M_{β_3}
									a_1	$-a_4$	$-a_5$	10	Q_4
										a_2	a_6	11	M_{α_4}
											a_3	12	M_{β_4}

Симметрично

Все члены матрицы
умножаются на коэффициент

$$\frac{Eh^3}{12 ab (1-\mu^2)}$$

$$\begin{aligned}
a_6 &= -\mu ab; \quad a_7 = -2(2\gamma - \tau) - \frac{1}{5}(14 - 4\mu); \quad a_8 = \left[\tau - \frac{1}{5}(1 + 4\mu) \right] b; \\
a_9 &= \left[\frac{2\tau}{3} - \frac{4}{15}(1 - \mu) \right] b^2; \quad a_{10} = -\left[2\gamma + \frac{1}{5}(1 - \mu) \right] a; \quad a_{12} = \left[\frac{2\gamma}{3} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{15}(1 - \mu) \right] a^2; \quad a_{13} = 2(\gamma - 2\tau) - \frac{1}{5}(14 - 4\mu); \quad a_{14} = \left[2\tau + \frac{1}{5}(1 - \mu) \right] b; \\
a_{15} &= \left[\frac{2\tau}{3} - \frac{1}{15}(1 - \mu) \right] b^2; \quad a_{16} = \left[-\gamma + \frac{1}{5}(1 + 4\mu) \right] a; \quad a_{18} = \left[\frac{2\gamma}{3} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{15}(1 - \mu) \right] a^2; \quad a_{19} = -2(\tau + \gamma) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu); \quad a_{20} = \left[\tau - \frac{1}{5}(1 - \mu) \right] b; \\
a_{21} &= \left[\frac{\tau}{3} + \frac{1}{15}(1 - \mu) \right] b^2; \quad a_{22} = -\left[\gamma - \frac{1}{5}(1 - \mu) \right] a; \quad a_{24} = \left[\frac{\gamma}{3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{15}(1 - \mu) \right] a^2; \quad a_{11} = a_{17} = a_{23} = 0; \quad \tau = \frac{a^2}{b^2}; \quad \gamma = \frac{b^2}{a^2}.
\end{aligned}$$

Полусовместный прямоугольный элемент с тремя степенями свободы в узле. Этот элемент предложен в работе [34]. Набор степеней свободы аналогичен элементу Кляфа (рис. 2.5), однако аппроксимирующие функции несколько отличны и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
\varphi_{1, w} &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3); \\
\varphi_{1, \alpha} &= b \left((1 - \xi)\eta(1 - \eta)^2 + \frac{1}{4}\varphi \right); \\
\varphi_{1, \beta} &= -a \left(\xi(1 - \xi)^2(1 - \eta) + \frac{1}{4}\varphi \right); \\
\varphi_{2, w} &= (3\xi^2 - 2\xi^3)(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3); \\
\varphi_{2, \alpha} &= b \left(\xi\eta(1 - \eta)^2 - \frac{1}{4}\varphi \right); \\
\varphi_{2, \beta} &= a \left((\xi^2 - \xi^3)(1 - \eta) - \frac{1}{4}\varphi \right); \\
\varphi_{3, w} &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)(3\eta^2 - 2\eta^3); \\
\varphi_{3, \alpha} &= b \left((-\eta^2 + \eta^3)(1 - \xi) + \frac{1}{4}\varphi \right); \\
\varphi_{3, \beta} &= a \left(-\xi(1 - \xi)^2\eta + \frac{1}{4}\varphi \right); \\
\varphi_{4, w} &= (3\xi^2 - 2\xi^3)(3\eta^2 - 2\eta^3); \\
\varphi_{4, \alpha} &= b \left(\xi(-\eta^2 + \eta^3) - \frac{1}{4}\varphi \right); \\
\varphi_{4, \beta} &= a \left((\xi^2 - \xi^3)\eta + \frac{1}{4}\varphi \right); \\
\varphi &= (\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3)(\eta - 3\eta^2 + 2\eta^3); \\
\xi &= \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b}.
\end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Функции φ_{jw} такие же, как и для совместного конечного элемента с четырьмя степенями свободы в узле. Функции же типа $\varphi_{j,\alpha}$ и $\varphi_{j,\beta}$ имеют разрывы нормальной производной на границах. Отсюда и название этого элемента — полусовместный. Исследование этого элемента, приведенное в работе [34], показало, что порядок сходимости по перемещениям и напряжениям равен h^2 , хотя численные эксперименты показывают более высокий порядок сходимости по перемещениям — h^3 , т. е. выше, чем для элемента Клафа.

Матрица жесткости этого элемента, полученная на основе (1.8), (2.5), (2.6), приведена в табл. 2.5 с коэффициентами:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{156}{35} (\gamma + \tau) + 2,88; \\
 a_2 &= \left(\frac{1}{280} \gamma + \frac{233}{168} \tau + \frac{163}{600} - \frac{13}{60} \mu \right) b^2; \\
 a_3 &= \left(\frac{233}{168} \gamma + \frac{1}{280} \tau + \frac{163}{600} - \frac{13}{60} \mu \right) a^2; \\
 a_4 &= \left(\frac{9}{140} \gamma + \frac{303}{140} \tau + 0,22 + \mu \right) b; \\
 a_5 &= \left(-\frac{303}{140} \gamma - \frac{9}{140} \tau - 0,22 - \mu \right) a; \\
 a_6 &= \left(-\frac{1}{35} (\gamma + \tau) - 1,05\mu - 0,005 \right) ab; \\
 a_7 &= -\frac{156}{35} \gamma + \frac{54}{35} \tau - 2,88; \\
 a_8 &= \left(-\frac{9}{140} \gamma + \frac{117}{140} \tau - 0,22 - \mu \right) b; \\
 a_9 &= \left(-\frac{1}{280} \gamma + \frac{103}{168} \tau - \frac{163}{600} + \frac{13}{60} \mu \right) b^2; \\
 a_{10} &= \left(-\frac{303}{140} \gamma - \frac{9}{140} \tau - 0,22 \right) a; \\
 a_{11} &= \left(-\frac{1}{35} (\gamma + \tau) - 0,005 - 0,05 \mu \right) ab; \\
 a_{12} &= \left(\frac{121}{168} \gamma + \frac{1}{280} \tau - \frac{37}{600} + \frac{7}{60} \mu \right) a^2; \\
 a_{13} &= \frac{54}{35} \gamma - \frac{156}{35} \tau - 2,88; \\
 a_{14} &= \left(\frac{9}{140} \gamma + \frac{303}{140} \tau + 0,22 \right) b; \\
 a_{15} &= \left(\frac{1}{280} \gamma + \frac{121}{168} \tau + \frac{7}{60} \mu - \frac{37}{600} \right) b^2;
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
a_{16} &= \left(-\frac{117}{140} \gamma + \frac{9}{140} \tau + 0,22 + \mu \right) a; \\
a_{17} &= \left(\frac{1}{35} (\gamma + \tau) + 0,005 + 0,05\mu \right) ab; \\
a_{18} &= \left(\frac{103}{168} \gamma - \frac{1}{280} \tau - \frac{163}{600} + \frac{13}{60} \mu \right) a^2; \\
a_{19} &= -\frac{54}{35} (\gamma + \tau) + 2,88; \\
a_{20} &= \left(-\frac{9}{140} \gamma + \frac{117}{140} \tau - 0,22 \right) b; \\
a_{21} &= \left(-\frac{1}{280} \gamma + \frac{47}{168} \tau + \frac{37}{600} - \frac{7}{60} \mu \right) b^2; \\
a_{22} &= \left(-\frac{117}{140} \mu + \frac{9}{140} \tau + 0,22 \right) a; \\
a_{23} &= \left(\frac{1}{35} (\gamma + \tau) + 0,005 + 0,05\mu \right) ab; \\
a_{24} &= \left(\frac{47}{168} \gamma - \frac{1}{280} \tau + \frac{37}{600} - \frac{7}{60} \mu \right) a^2; \\
\gamma &= \frac{a^2}{b^2}; \quad \tau = \frac{b^2}{a^2};
\end{aligned}$$

Треугольный элемент. Этот элемент предложен в работе [34]. В каждом j узле (см. рис. 2.5) вводится по три степени свободы (W_j, α_j, β_j). Элемент удобен в реализации, так как по сравнению с элементом Коупера (шесть степеней свободы в узле) он совместим (по набору степеней свободы) с прямоугольными элементами Клафа. По сравнению с элементом Евзерова (см. п. 1.3), матрица жесткости этого элемента не зависит от порядка нумерации узлов.

Аппроксимирующие функции имеют вид:

$$\varphi_{jw} = \theta_{jw}; \quad \varphi_{ja} = c\theta_{ja}; \quad \varphi_{j\beta} = a\theta_{j\beta} - b\varphi_{ja}; \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

$$\text{при } \theta_{1w} = 1 - 3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 2\eta^3 + 6(1 - \lambda_1 - \lambda_2)\chi_1 + 12(\lambda_2 - 1)\chi_2 + 12(\lambda_1 - 1)\chi_3;$$

$$\theta_{1a} = \eta(1 - \eta)^2 - \xi^2\eta - 0,5\psi + (1,5 - 3\lambda_2)\chi_1 + (6\lambda_2 - 4)\chi_2 - 2\chi_3;$$

$$\theta_{1/3} = -\xi(1 - \xi)^2 + \xi\eta^2 + 0,5\psi + (3\lambda_1 - 1,5)\chi_1 + 2\chi_2 + (4 - 6\lambda_2)\chi_3;$$

$$\theta_{2w} = 3\xi^2 - 2\xi^3 + (1 - \lambda_1 - \lambda_3)(12\chi_3 - 6\chi_1) + 12(1 - \lambda_3)\chi_2;$$

$$\theta_{2a} = \chi^2\eta + 0,5\psi + (3\lambda_3 - 1,5)\chi_1 + (4 - 6\lambda_3)\chi_2 + (2 - 6\lambda_3)\chi_3;$$

$$\theta_{2\beta} = \xi^2(1 - \xi) + (1 - \lambda_1 - \lambda_3)(6\chi_3 - 3\chi_1) + 6(1 - \lambda_3)\chi_2;$$

$$\theta_{3w} = 3\eta^2 - 2\eta^3 + (\lambda_2 - \lambda_3)(6\chi_1 - 12\chi_2) + 12\lambda_3\chi_3;$$

$$\Theta_{3\alpha} = -\eta^2 + \eta^3 + (\lambda_3 - \lambda_2)(3\chi_1 - 6\chi_2) - 6\lambda_3\chi_3;$$

$$\Theta_{3\beta} = -\eta^2\xi - 0,5\psi + (3\lambda_3 - 1,5)\chi_1 + (4 - 6\lambda_3)\chi_2 + (2 - 6\lambda_3)\chi_3;$$

$$\chi_1 = \xi\eta(1 - \xi - \eta);$$

$$\chi_2 = \xi^2\eta(1 - \xi - \eta);$$

$$\chi_3 = \xi\eta^2(1 - \xi - \eta); \psi = \xi\eta(1 - \xi - \eta);$$

$$\xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{b};$$

$$\lambda_1 = \frac{b}{a}; \lambda_2 = \frac{ab}{a^2 + b^2}; \lambda_3 = \frac{(a-b)a}{c^2 - (a-b)^2}.$$

Матрица жесткости строится на основе (1.8), (2.5), (2.8). Поскольку представление матрицы жесткости в формульном виде затруднено (отдельные элементы матрицы содержат до 50 членов), целесообразно ее непосредственное получение программным способом по алгоритму (см. гл. 4). Исследования, проведенные в работе [34], показывают, что порядок сходимости этого элемента по напряжениям и перемещениям равен h .

2.5. Оболочечные системы

Оболочки двоякой кривизны — один из самых сложных объектов строительной механики. Это вызвано сложными геометрическими и физическими соотношениями для оболочек. Приведем векторы напряжений σ и деформаций ϵ , построенные на основе технической теории пологих оболочек. Вектор ϵ состоит из шести компонентов:

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} + k_1 w \text{ — относительная деформация срединной поверхности вдоль оси } x;$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} + k_2 W \text{ — относительная деформация срединной поверхности вдоль оси } y;$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + 2k_{12}W \text{ — деформация сдвига срединной поверхности};$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \text{ — деформация кривизны вдоль оси } x;$$

$$\chi_y = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \text{ — деформация кривизны вдоль оси } y;$$

$$\chi_{xy} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \text{ — смешанная деформация кривизны.}$$

В этих выражениях $k_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $k_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $k_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ — кривизны оболочки, характеризующие ее геометрию.

Вектор напряжений σ также состоит из шести компонентов:

$$N_x = \frac{Eh}{(1-\mu^2)} (\epsilon_x + \mu\epsilon_y) - \text{погонные напряжения вдоль оси } x;$$

$$N_y = \frac{Eh}{(1-\mu^2)} (\epsilon_y + \mu\epsilon_x) - \text{погонные напряжения вдоль оси } y;$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \epsilon_{xy} - \text{сдвиговые погонные напряжения};$$

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\chi_x + \mu\chi_y) - \text{погонные моменты относительно оси } Y;$$

$$M_y = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\chi_y + \mu\chi_x) - \text{погонные моменты относительно оси } X;$$

$$M_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \chi_{xy} - \text{погонные крутящие моменты}.$$

Здесь h — толщина оболочки; E , μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Для оболочки вектор перемещений u состоит из компонентов u_x , u_y , u_z .

С учетом принятых обозначений и соотношений выражение для полной потенциальной энергии тонкой оболочки примет вид:

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (N_x \epsilon_x + N_y \epsilon_y + S \epsilon_{xy} + M_x \chi_x + M_y \chi_y + 2M_{xy} \chi_{xy}) d\Omega. \quad (2.9)$$

Прямоугольный конечный элемент оболочки двоякой кривизны. Для каждого из четырех узлов примем шесть степеней свободы — три линейных перемещения U , V , W соответственно по направлению осей x , y , z , угловые перемещения α и β относительно осей x , y и величины κ , моделирующие крутильную деформацию в каждом узле. Таким образом, общее число степеней свободы равно 24. Аппроксимацию перемещений u_x и u_y примем по аналогии с прямоугольным конечным элементом плоского напряженного состояния, т. е. в виде (1.20), а аппроксимацию u_z по аналогии с прямоугольным элементом плиты Богнера — Фокса — Шмидта, т. е. в виде (1.22).

Таким образом, аппроксимация перемещений по области КЭ:

$$u(x, y) = X_1 Y_1 U_1 + X_2 Y_1 U_2 + X_1 Y_2 U_3 + X_2 Y_2 U_4;$$

$$V(x, y) = X_1 Y_1 V_1 + X_2 Y_1 V_2 + X_1 Y_2 V_3 + X_2 Y_2 V_4;$$

$$w(x, y) = X_3 Y_3 W_1 + X_2 Y_5 \alpha_1 - X_5 Y_3 \beta_1 + X_5 Y_5 \gamma_1 + X_4 Y_3 W_2 + X_4 Y_5 \alpha_2 -$$

$$- X_6 Y_3 \beta_2 + X_6 Y_5 \gamma_2 + X_3 Y_4 W_3 + X_3 Y_6 \alpha_3 - X_5 Y_4 \beta_3 + X_5 Y_6 \gamma_3 + X_4 Y_4 W_4 +$$

$$+ X_4 Y_6 \alpha_4 - X_6 Y_4 \beta_4 + X_6 Y_6 \gamma_4, \quad (2.10)$$

$$\text{где } X_1 = \frac{a-x}{a}; X_2 = \frac{x}{a}; X_3 = \frac{1}{a^3}(2x^3-3ax^2+a^3), X_4 = \frac{2x^3-3ax^2}{a^3};$$

$$X_5 = \frac{1}{a^2}(x^3-2ax^2+ax); X_6 = \frac{1}{a^2}(x^3-ax^2).$$

Полиномы типа Y аналогичны полиномам типа X . Отличие заключается в замене x на y и a на b .

Формула для построения матрицы жесткости для оболочки двоякой кривизны в данном случае примет вид:

$$K_{ij} = \int_0^a \int_0^b (N_{xi} \varepsilon_{xj} + N_{yi} \varepsilon_{yj} + S_i \varepsilon_{xyj} + M_{xi} \chi_{xj} + M_{yi} \chi_{yj} + 2M_{xyi} \chi_{xyj}) dx dy. \quad (2.11)$$

В качестве примера определим горизонтальную реакцию узла I по направлению оси y от вертикального перемещения этого же узла, т. е. элемент k_{y1w1} . Сначала определим компоненты вектора деформаций по области КЭ от перемещения W_1 :

$$\varepsilon_x, w_1 = k_1 X_3 Y_3 W_1; \quad \varepsilon_y, w_1 = k_2 X_3 Y_3 W_1;$$

$$\varepsilon_{xy}, w_1 = 2k_{12} X_3 Y_3 W_1; \quad \chi_x, w_1 = X_3^{xx} Y_3 W_1;$$

$$\chi_y, w_1 = X_3 Y_3^{yy} W_1; \quad \chi_{xy}, w_1 = X^x Y_3^y.$$

Теперь определим компоненты вектора напряжений от V_1 :

$$N_{x, v_1} = \frac{E h \mu}{1 - \mu^2} X_1 Y_1^y V_1;$$

$$N_{y, v_1} = \frac{E h}{1 - \mu^2} X_1 Y_1^y V_1;$$

$$N_{xy, v_1} = \frac{E h^2}{2(1 + \mu)} X_1^x Y V_1.$$

Здесь индексы сверху обозначают операторы дифференцирования, т. е.:

$$X_3^{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_3 = \frac{12x - 6a}{a^3};$$

$$Y_3^{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y_3 = \frac{12y - 6b}{b^3};$$

$$X_3^x = \frac{\partial}{\partial x} X_3 = \frac{6x^2 - 6ax}{a^3};$$

$$Y_3^y = \frac{\partial}{\partial y} Y_3 = \frac{6y^2 - 6yb}{b^3};$$

$$X_1^x = \frac{\partial}{\partial x} X_1 = -\frac{1}{a}; \quad Y_1^y = \frac{\partial}{\partial y} Y_1 = -\frac{1}{b}.$$

Подставляя значения векторов σ_{v_i} и ε_{w_i} в формулу (2.11) для K_{ij} , получим:

$$K_{v_1, w_1} = \int_0^a \int_0^b (N_{x, v_1} \varepsilon_{x w_1} + N_{y, v_1} \varepsilon_{y w_1} + N_{xy, v_1} \gamma_{xy, w_1}) dx dy = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{E h \mu}{1 - \mu^2} \times \right. \\ \times X_1 Y_1^y K_1 X_3 Y_3 + \frac{E h}{1 - \mu^2} X_1 Y_1^y K_2 X_3 Y_3 + \\ \left. + \frac{E h}{2(1 + \mu)} X_1^x Y_1 2 K_{12} X_3 Y_3 \right) dx dy = - \frac{7}{40} \cdot \frac{E h}{(1 - \mu^2)} [a(\mu K_1 + K_2) + \\ + b K_{12}(1 - \mu)].$$

Аналогичным образом можно построить все остальные элементы матрицы жесткости. В рассмотренном примере считается, что кривизны K_1 , K_2 , K_{12} постоянны. В случае если кривизны K_1 , K_2 , K_{12} представляют собой функции от x и y , то при вычислении интеграла (2.11) с этими величинами надо обращаться не как с константами, а как с функциями.

Прямоугольный конечный элемент оболочки нулевой кривизны. Матрица жесткости приведенного выше элемента несвободна от эффекта жесткого смещения, который обуславливается противоречиями гипотез технической теории оболочек. Использование гипотез общей теории оболочек приводит к значительным усложнениям, а попытка избавиться от эффекта жестких смещений при помощи определенной обработки матрицы жесткости приводит к вырождению элемента в плоский¹. В связи с этим естественно с точки зрения физического смысла использовать для расчета оболочек двойкой кривизны плоские элементы. Здесь элемент оболочки может быть получен простой комбинацией элементов для плоского напряженного состояния и изгиба пластины с удовлетворением всех необходимых требований. Учет же геометрических особенностей оболочки будет обеспечиваться учетом геометрии вписанного многогранника. Причем из чисто физических соображений о том, что со сгущением сетки будет увеличиваться точность аппроксимации поверхности оболочки геометрией вписанного многогранника, можно судить, что сходимость МКЭ в этом случае будет обеспечена. При назначении расчетной схемы оболочки необходимо, чтобы плоские КЭ вписывались в геометрию оболочки. Поэтому для развертывающихся на плоскость поверхностей (цилиндрические поверхности) можно использовать прямоугольные КЭ, а при неразвертывающихся поверхностях (поверхности двойкой кривизны) — треугольные КЭ.

В табл. 2.6 приведены матрица жесткости прямоугольного плоского элемента оболочки, полученная простым совмещением матриц жесткости прямоугольных элементов плоского напряженного состояния (см. табл. 2.3), и плиты (см. табл. 2.5). Так можно получить матрицу для плоского треугольного элемента.

¹ Эти проблемы подробно изложены в работе [60].

Таблица 2.6

(матрица)

U_1	V_1	W_1	α_1	β_1	U_2	V_2	W_2	α_2	β_2	U_3	V_3	W_3	α_3	β_3	U_4	V_4	W_4	α_4	β_4	
a_1	a_3				a_5	$-a_4$				a_9	a_4				a_7	$-a_3$				Q_{x1}
	a_2				a_4	a_6				$-a_4$	a_{10}				$-a_3$	a_8				Q_{y1}
		b_1	b_4	b_5			b_7	b_8	b_{10}			b_{13}	b_{14}	b_{16}			b_{19}	b_{20}	b_{22}	Q_{z1}
			b_2	b_6			b_8	b_9	b_{11}			$-b_{14}$	b_{15}	b_{17}			$-b_{20}$	$-b_{21}$	b_{23}	M_{α_1}
				b_3			$-b_{10}$	$-b_{11}$	b_{12}			b_{16}	$-b_{17}$	b_{18}			$-b_{22}$	b_{23}	b_{24}	M_{β_1}
					a_1	$-a_3$				a_7	a_3				a_9	$-a_4$				Q_{x2}
						a_2				a_3	a_8				a_4	a_{10}				Q_{y2}
							b_1	b_4	$-b_5$			b_{19}	b_{20}	$-b_{22}$			b_{13}	b_{14}	$-b_{16}$	Q_{z2}
												$-b_{20}$	b_{21}	$-b_{23}$			$-b_{14}$	b_{15}	$-b_{17}$	M_{α_2}
												b_{22}	$-b_{23}$	b_{24}			$-b_{16}$	b_{17}	b_{18}	M_{β_2}
																				Q_{x3}
										a_1	$-a_3$				a_5	a_4				Q_{y3}
											a_2				$-a_4$	a_6				Q_{z3}
												b_1	$-b_4$	b_5			b_7	$-b_8$	b_{10}	M_{α_3}
													b_2	$-b_6$			$-b_8$	b_9	$-b_{11}$	M_{β_3}
														b_3			$-b_{10}$	b_{11}	b_{12}	Q_{x4}
															a_1	a_3				...
																	...	...	...	...
																		b_2	b_6	M_{α_4}
																			a_3	M_{β_4}

Симметрично

Все члены матрицы a_i умножаются на коэффициент $\frac{Eh}{1-\mu^2}$

Все члены матрицы b_i умножаются на коэффициент $\frac{Eh^3}{12ab(1-\mu^2)}$

В головке таблицы даны степени свободы, в боковике — узловые усилия (см., например, табл. 2.4)

2.6. Конструкции на упругом основании

В работе [47] изложен метод расчета конструкций на упругом основании с учетом сжимающих и сдвигающих усилий в грунте. Такая методика дает возможность учесть работу грунта, лежащего за пределами конструкции. Потенциальная энергия системы в этом случае

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

где Π_1 — потенциальная энергия собственно конструкции; Π_2 — то же, упругого основания, контактирующего с конструкцией; Π_3 — то же, упругого основания, лежащего за пределами конструкции.

Выражение для Π_1 зависит от типа конструкции, а выражения для Π_2 и Π_3 имеют вид:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \left\{ c_1 \omega_i^2 + c_2 \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega_i, \quad (2.12)$$

где c_1, c_2 — жесткости основания соответственно на сжатие и сдвиг; $i=2, 3$; $\omega_i = \omega_i(x, y)$ — функции упругой осадки основания.

В работе [30] для расчета плиты на упругом основании предлагается использовать элементы трех типов (рис. 2.6). Первый тип — прямоугольный или треугольный элемент, моделирующий работу собственно конструкции и упругого основания, контактирующего с ней. Второй и третий типы моделируют работу упругого основания за пределами плиты и включают соответственно два или один узел, примыкающие к контуру плиты. Потенциальная энергия для элементов первого типа равна $\Pi_1 + \Pi_2$, а для элементов второго и третьего типа — Π_3 .

Прямоугольный элемент плиты на упругом основании (элемент первого типа). Выражение Π_1 для потенциальной энергии

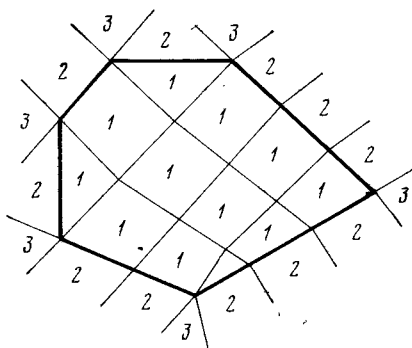


Рис. 2.6

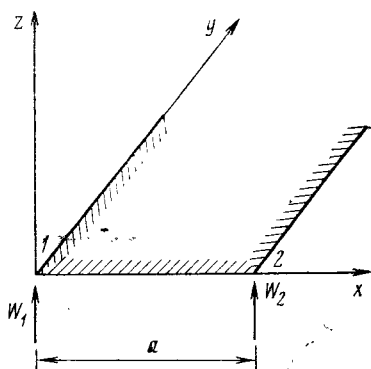


Рис. 2.7

плиты принимаем в виде (2.5), а для Π_2 в виде (2.12). Поскольку в выражение для Π_1 входят производные второго порядка, а для Π_2 первого, аппроксимацию перемещений принимаем такую, чтобы она удовлетворяла требованиям (как более жестким), накладываемым выражением (2.5). По аналогии с выражением потенциальной энергии для элементов первого типа матрица жесткости также может быть получена простым суммированием матрицы жесткости для элемента плиты и элемента упругого основания. Аппроксимацию перемещений принимаем в виде (1.25), что обуславливает в каждом узле по три степени свободы (см. рис. 2.4). Это соответствует прямоугольному элементу плиты Клафа, матрица жесткости которого приведена в табл. 2.4. Матрица жесткости упругого основания, полученная на основе (1.8), (1.25), (2.12), приведена в табл. 2.7. Порядок сходимости этого элемента по перемещениям и напряжениям (моментам) равен h^2 . В таблице принято:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0,1371 c_1 ab + 0,4381 c_2 \frac{b}{a} + 0,4381 c_2 \frac{a}{b}; & a_2 &= 0,0183 c_1 ab^2 + \\
 &+ 0,0525 c_2 \frac{b^2}{a} + 0,0333 c_2 a; & a_3 &= -0,0183 c_1 a^2 b - 0,0525 c_2 \frac{a^2}{b} - 0,0333 c_2 b; \\
 a_4 &= 0,0486 c_1 ab - 0,4381 c_1 \frac{b}{a} + 0,1619 c_2 \frac{a}{b}; & a_5 &= 0,0079 c_1 ab^2 - \\
 &- 0,0525 c_2 \frac{b^2}{a} + 0,0167 c_2 a; & a_6 &= 0,0109 c_1 a^2 b - 0,0333 c_2 b + 0,0309 c_2 \frac{a^2}{b}; \\
 a_7 &= 0,0486 c_1 ab + 0,1619 c_2 \frac{b}{a} - 0,4381 c_2 \frac{a}{b}; & a_8 &= -0,0109 c_1 ab^2 - \\
 &- 0,0309 c_2 \frac{b^2}{a} + 0,0333 c_2 a; & a_9 &= -0,0079 c_1 a^2 b - 0,0167 c_2 b + 0,0525 c_2 \frac{a^2}{b}; \\
 a_{10} &= 0,0157 c_1 ab - 0,1619 c_2 \frac{b}{a} - 0,1619 c_2 \frac{a}{b}; & a_{11} &= -0,0045 c_1 ab^2 + \\
 &+ 0,0309 c_2 \frac{b^2}{a} + 0,0167 c_2 a; & a_{12} &= 0,0045 c_1 a^2 b - 0,0167 c_2 b - 0,0309 c_2 \frac{a^2}{b}; \\
 a_{13} &= 0,0030 c_1 ab^3 + 0,0094 c_2 \frac{b^3}{a} + 0,0444 c_2 ab; & a_{14} &= -0,0027 c_1 a^2 b^2; \\
 a_{15} &= 0,0016 c_1 ab^3 - 0,0094 c_2 \frac{b^3}{a} + 0,0225 c_2 ab; & a_{16} &= 0,0013 c_1 a^2 b^2; \\
 a_{17} &= 0,0109 c_1 ab^2 + 0,0309 c_2 \frac{b^2}{a} - 0,0333 c_2 a; & a_{18} &= -0,0025 c_1 ab^3 - \\
 &- 0,0072 c_2 \frac{b^3}{a} - 0,0114 c_2 ab; & a_{19} &= -0,0013 c_1 a^2 b^2; & a_{20} &= 0,0045 c_1 ab^2 - \\
 &- 0,0309 c_2 \frac{b^2}{a} - 0,0167 c_2 a; & a_{21} &= -0,0011 c_1 ab^3 + 0,0072 c_2 \frac{b^3}{a} - 0,0054 c_2 ab;
 \end{aligned}$$

Таблица 2.7
(матрица)

W_1	α_1	β_1	W_2	α_2	β_2	W_3	α_3	β_3	W_4	α_4	β_4	Степени свободы / Узловые условия
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	Q_1
	a_{13}	a_{14}	a_5	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{16}	M_{a_1}
		a_{22}	a_{23}	a_{19}	a_{24}	a_9	a_{16}	a_{25}	a_{26}	a_{16}	a_{27}	M_{β_1}
			a_1	a_2	a_{28}	a_{10}	a_{11}	a_{26}	a_7	a_8	a_{29}	Q_2
				a_{13}	a_{30}	a_{20}	a_{21}	a_{19}	a_{17}	a_{18}	a_{16}	M_{a_2}
					a_{22}	a_{12}	a_{19}	a_{27}	a_{29}	a_{19}	a_{25}	M_{β_2}
						a_1	a_{31}	a_3	a_4	a_{32}	a_6	Q_3
							a_{13}	a_{30}	a_{32}	a_{15}	a_{19}	M_{a_3}
								a_{22}	a_{23}	a_{16}	a_{24}	M_{β_3}
									a_1	a_{31}	a_{28}	Q_4
										a_{13}	a_{14}	M_{a_4}
											a_{22}	M_{β_4}

Симметрично

$$\begin{aligned}
a_{22} &= 0,003 c_1 a^3 b + 0,0444 c_2 a b + 0,0094 c_2 \frac{a^3}{b}; & a_{23} &= -0,0109 c_1 a^2 b + \\
&+ 0,0333 c_2 b - 0,0309 c_2 \frac{a^2}{b}; & a_{24} &= -0,0025 c_1 a^3 b - 0,0114 c_2 a b - 0,0072 c_2 \frac{a^3}{b}; \\
a_{25} &= 0,0016 c_1 a^3 b + 0,0225 c_2 a b - 0,0094 c_2 \frac{a^3}{b}; & a_{26} &= -0,0045 c_1 a^2 b + \\
&+ 0,0167 c_2 b + 0,0309 c_2 \frac{a^2}{b}; & a_{27} &= -0,0011 c_1 a^3 b - 0,0054 c_2 a b + 0,0072 c_2 \frac{a^3}{b}; \\
a_{28} &= 0,0183 c_1 a^2 b + 0,0333 c_2 b + 0,0525 c_2 \frac{a^2}{b}; & a_{29} &= 0,0079 c_1 a^2 b + 0,0167 c_2 b - \\
&- 0,0525 c_2 \frac{a^2}{b}; & a_{30} &= 0,0027 c_1 a^2 b^2; & a_{31} &= -0,0183 c_1 a b^2 - 0,0525 c_2 \frac{b^2}{a} - \\
&- 0,0333 c_2 a; & a_{32} &= -0,0079 c_1 a b^2 + 0,0525 c_2 \frac{b^2}{a} - 0,0167 c_2 a.
\end{aligned}$$

Треугольный элемент плиты на упругом основании (элемент первого типа). Матрица жесткости этого элемента может быть получена по аналогии с предыдущим. Аппроксимирующие функции могут быть приняты в виде (2.8). Матрица жесткости элемента плиты строится на основе (1.8), (2.5), (2.8), а упругого основания (1.8), (2.8), (2.12). Ввиду сложности аппроксимирующих функций (2.8) получение матрицы жесткости в формульном виде затруднено (отдельные ее элементы могут содержать до 50 членов) и ее получение целесообразно непосредственно программным способом.

Законтурный двухузловой элемент упругого основания (элемент второго типа). Аппроксимацию перемещений для этого элемента (рис. 2.7) примем в виде:

$$w(x, y) = \frac{a-x}{a} e^{-\alpha y} W_1 + \frac{x}{a} e^{-\alpha y} W_2, \quad (2.13)$$

где $\alpha = \sqrt{C_1/C_2}$; C_1, C_2 — жесткости основания на сжатие и на сдвиг.

Область законтурного элемента определяется пределами $[0, a; 0, \infty]$. Элементы матрицы жесткости, полученные на основе (1.8), (2.12), (2.13):

$$\left. \begin{aligned} k_{11} = k_{22} &= \frac{2C_1 a^2 + 3C_2}{6a\alpha}; \\ k_{12} = k_{21} &= \frac{2C_1 a^2 - 6C_2}{12a\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Хотя аппроксимирующий полином и является решением однородного дифференциального уравнения упругого основания, он

не удовлетворяет условиям совместности по перемещениям по линиям контакта первого и второго типов элементов. Для обеспечения этого условия в каждом узле принимаем две степени свободы, а в качестве аппроксимирующего полинома выражение

$$w(x, y) = \frac{2x^3 - 3ax^2 + a^3}{a^3} e^{-ay} W_1 - \frac{2x^3 - 3ax^2}{a^3} e^{-ay} W_2 - \frac{x^3 - 2ax^2 + a^2 x e^{-ay}}{a^2} e^{-ay} \beta_1 - \frac{x^3 - ax^2}{a^2} e^{-ay} \beta_2. \quad (2.15)$$

Матрица жесткости для этого элемента, построенная на основе (1.8), (2.12), (2.15), приведена в табл. 2.8, в которой принято:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{13}{70} \cdot \frac{C_1 a}{a} + \frac{6}{10} \cdot \frac{C_2}{a a} + \frac{13}{70} C_2 a a; \quad a_2 = -\frac{11}{420} \cdot \frac{C_1 a^2}{a} - \\ &- \frac{1}{20} \cdot \frac{C_2}{a} - \frac{11}{420} C_2 a^2 a; \quad a_3 = \frac{9}{140} \cdot \frac{C_1 a}{a} - \frac{6}{10} \cdot \frac{C_2}{a a} + \frac{9}{140} C_2 a a; \\ a_4 &= \frac{13}{840} \cdot \frac{C_1 a^2}{a} - \frac{1}{20} \cdot \frac{C_2}{a} + \frac{13}{840} C_2 a^2 a; \quad a_5 = \frac{1}{210} \cdot \frac{C_1 a^3}{a} + \frac{2}{30} \times \\ &\times \frac{C_2 a}{a} + \frac{1}{210} C_2 a^3 a; \quad a_6 = -\frac{13}{840} \cdot \frac{C_1 a^2}{a} + \frac{1}{20} \cdot \frac{C_2}{a} - \frac{13}{840} C_2 a^2 a; \\ a_7 &= -\frac{1}{280} \cdot \frac{C_1 a^3}{a} - \frac{1}{60} \cdot \frac{C_2 a}{a} - \frac{1}{280} C_1 a^3 a. \end{aligned}$$

Таблица 2.8
(матрица)

W_1	β_1	W_2	β_2	Степени свободы	Узловые усилия
a_1	a_2	a_3	a_4	Q_1	
	a_5	a_6	a_7	M_{β_1}	
Симметрично		a_1	$-a_2$	Q_2	
			a_5	M_{β_2}	

Законтурный одноузловой элемент упругого основания (элемент третьего типа). Для получения матрицы жесткости этого конечного элемента (рис. 2.8) выражение потенциальной энергии запишем в полярной системе координат:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \int_0^{\infty} \left\{ C_1 W^2 + C_2 \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)^2 \right] \right\} \rho d\varphi d\rho. \quad (2.16)$$

Аппроксимирующий полином примем в виде:

$$W(\rho, \varphi) = W_1 e^{-a\rho}. \quad (2.17)$$

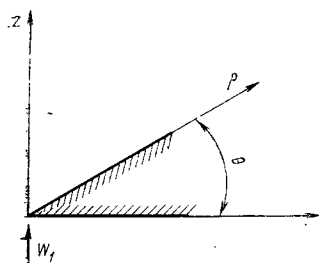


Рис. 2.8

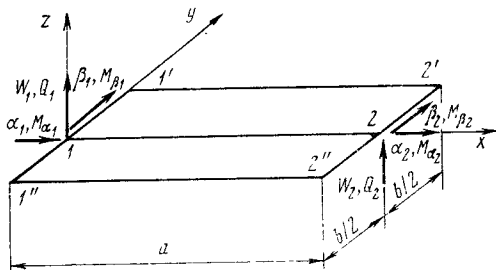


Рис. 2.9

Тогда на основе (1.23), (2.16), (2.17) получим матрицу жесткости (в данном случае она состоит из одного элемента):

$$r = \frac{\theta C_2}{2}. \quad (2.18)$$

Стержень на упругом основании. Этот элемент (рис. 2.9) может быть использован при расчете балочных ростверков на упругом основании. Выражение потенциальной энергии в данном случае:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4, \quad (2.19)$$

где Π_1 — потенциальная энергия элемента балки; Π_2 — то же, упругого основания; Π_3, Π_4 — то же, контурного упругого основания и расположенного соответственно вдоль линий $1'-2'$ и $1''-2''$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} \int_0^a \left[EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + GT \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx; \\ \Pi_2 &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ C_1 w^2 + C_2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy; \\ \Pi_{3,4} &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^\infty \left\{ C_1 w^2 + C_2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Для Π_1 и Π_2 аппроксимацию перемещений принимаем в виде:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \frac{2x^3 - 3ax^2 + a^3}{a^3} w_1 - \frac{2x^3 - 3ax^2}{a^3} w_2 + y \left(\frac{a-x}{a} \right) \alpha_1 + \\ &+ y \frac{x}{a} \alpha_2 - \frac{x^3 - 2ax^2 + a^2x}{a^2} \beta_1 - \frac{x^3 - ax^2}{a^2} \beta_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Матрицы жесткости элемента балки и упругого основания, полученные на основе (1.8), (2.9), (2.20), приведены соответственно в табл. 2.9 и 2.10.

Таблица 2.9

(матрица)

W_1	α_1	β_1	W_2	α_2	β_2	Степени свободы / Узловые усилия
a_1	—	a_2	a_3	—	a_2	Q_1
	a_4	—	—	a_5	—	M_{α_1}
		a_6	a_7	—	a_8	M_{β_1}
			a_1	—	a_7	Q_2
				a_4	—	M_{α_2}
					a_6	M_{β_2}

Симметрично

Таблица 2.10

(матрица)

W_1	α_1	β_1	W_2	α_2	β_2	Степени свободы / Узловые усилия
a_1	—	a_2	a_3	—	a_4	Q_1
	a_5	—	—	a_6	—	M_{α_1}
		a_7	a_8	—	a_9	M_{β_1}
			a_1	—	a_{10}	Q_2
				a_5	—	M_{β_2}
					a_7	M_{β_2}

Симметрично

В табл. 2.9 принято:

$$a_1 = 12EI/a^3; a_2 = -6EI/a^2; a_3 = -12EI/a^3; a_4 = GI/a; a_5 = -GI/a; a_6 = 4EI/a; a_7 = 6EI/a^2; a_8 = 2EI/a.$$

В табл. 2.10 принято:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{13}{35} C_1 ab + \frac{6}{5} \cdot \frac{C_2 b}{a}; a_2 = -\frac{11}{210} C_1 a^2 b - \frac{1}{10} C_2 b; a_3 = \\ &= \frac{9}{70} C_1 ab - \frac{6}{5} \cdot \frac{C_2 b}{a}; a_4 = \frac{13}{420} C_1 a^2 b - \frac{1}{10} C_2 b; a_5 = \frac{1}{36} C_1 ab^3 + \\ &+ \frac{C_2 b^3}{120} + \frac{C_2 ab}{3}; a_6 = \frac{C_1 ab^3}{72} - \frac{C_2 b^3}{12a} + \frac{C_2 ab}{6}; a_7 = \frac{1}{105} C_1 a^3 b + \\ &+ \frac{2}{15} C_2 ab; a_8 = -\frac{13}{420} C_1 a^2 b + \frac{1}{10} C_2 b; a_9 = -\frac{1}{140} C_1 a^3 b - \frac{1}{30} C_2 ab; \\ a_{10} &= \frac{11}{210} C_1 a^2 b + \frac{1}{10} C_2 b. \end{aligned}$$

Аппроксимация перемещений для Π_3 и Π_4 может быть принята в виде (2.13). Соответствующие этой аппроксимации матрицы жесткости приведены в табл. 2.11 и 2.12. В этих таблицах принято:

Таблица 2.11
(матрица)

W_1	α_1	W_2	α_2	q σ
a_2	a_1	a_3	a_4	Q_1
	a_5	a_4	a_6	M_{α_1}
Симметрично		a_1	a_2	Q_2
			a_5	M_{α_2}

Таблица 2.12
(матрица)

W_1	α_1	W_2	α_2	q σ
a_1	a_2	a_3	$-a_4$	Q_1
	a_5	$-a_4$	a_5	M_{α_1}
Симметрично		a_1	a_2	Q_2
			a_5	M_{α_2}

$$a_1 = \frac{2C_1a^2 + 3C_2}{6a\alpha}; \quad a_2 = \frac{2C_1a^2 + 3C_2}{6a\alpha} \cdot \frac{b}{2}; \quad a_3 = \frac{2C_1a^2 - 6C_2}{12a\alpha};$$

$$a_4 = \frac{2C_1a^2 - 6C_2}{12a\alpha} \cdot \frac{b}{2}; \quad a_5 = \frac{2C_1a^2 + 3C_2}{6a\alpha} \cdot \frac{b^2}{4}; \quad a_6 = \frac{2C_1a^2 - 6C_2}{12a\alpha} \cdot \frac{b^2}{4}.$$

Аппроксимация (2.13) несовместна с (2.20), поэтому может быть заменена на более сложную, но совместную с (2.20):

$$w(x, y) = \frac{2x^3 - 3ax^2 + a^3}{a^3} e^{-\alpha y} W_1 - \frac{2x^3 - 3ax^2}{a^3} e^{-\alpha y} W_2 -$$

$$- \frac{x^3 - 2ax^2 + a^2x}{a^2} e^{-\alpha y} \beta_1 - \frac{x^3 - ax^2}{a^2} e^{-\alpha y} \beta_2 \pm \frac{b}{2} \cdot \frac{a-x}{a} e^{-\alpha y} \alpha_1 \pm$$

$$\pm \frac{b}{2} \cdot \frac{x}{a} e^{-\alpha y} \alpha_2. \quad (2.21)$$

Верхний знак у последних двух членов полинома соответствует аппроксимации Π_3 , а нижний — Π_4 . Матрицы жесткости для законтурных элементов $I'—2'$ и $I''—2''$ (см. рис. 2.9), соответствующие аппроксимации (2.21), приведены в табл. 2.13 и 2.14, в которых принято:

$$a_1 = \frac{13C_1a}{70\alpha} + \frac{6C_2}{10a\alpha} + \frac{13C_2a\alpha}{70}; \quad a_2 = \left(\frac{7C_1a}{40\alpha} + \frac{C_2}{2a\alpha} + \frac{7}{40} C_2a\alpha \right) \frac{b}{2};$$

$$a_3 = - \frac{11C_1a^2}{420\alpha} - \frac{C_2}{20\alpha} - \frac{11C_1a^2\alpha}{420}; \quad a_4 = \frac{9C_1a}{140\alpha} - \frac{6C_2}{10a\alpha} + \frac{9C_1a\alpha}{140};$$

$$a_5 = \left(\frac{3C_1a}{40\alpha} - \frac{C_2}{2a\alpha} + \frac{3C_2a\alpha}{40} \right) \frac{b}{2}; \quad a_6 = \frac{13C_1a^2}{840\alpha} - \frac{C_2}{20\alpha} + \frac{13C_2a^2\alpha}{840};$$

$$\begin{aligned}
 a_7 &= \frac{2C_1a^2 + 3C_2}{6aa} \cdot \frac{b^2}{4}; \quad a_8 = -\left(\frac{C_1a^2}{40a} + \frac{C_2a^2a}{40}\right) \frac{b}{2}; \quad a_9 = \frac{2C_1a^2 - 6C_2}{12aa} \times \\
 &\times \frac{b^2}{4}; \quad a_{10} = \left(\frac{C_1a^2}{60a_j} + \frac{C_2a^2a}{60}\right) \frac{b}{2}; \quad a_{11} = \frac{C_1a^3}{210a} + \frac{2C_2a}{30a} + \frac{C_2a^3a}{210}; \\
 a_{12} &= -\frac{13C_1a^2}{840a} + \frac{C_2}{20a} - \frac{13C_2a^2a}{840}; \quad a_{13} = -\left(\frac{C_1a^2}{60a} + \frac{C_2a^2a}{60}\right) \frac{b}{2}; \\
 a_{14} &= -\frac{C_1a^3}{280a} - \frac{C_2a}{60a} - \frac{C_2a^3a}{280}; \quad a_{15} = \frac{11C_1a^2}{420a} + \frac{C_2}{20a} + \frac{11C_2a^2a}{420}; \\
 a_{16} &= \left(\frac{C_1a^2}{40a} + \frac{C_2a^2a}{40}\right) \frac{b}{2}.
 \end{aligned}$$

Таблица 2.13-
(матрица)

W_1	α_1	β_1	W_2	α_2	β_2	q / σ
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	Q_1
	a_7	a_8	a_5	a_9	a_{10}	M_{α_1}
		a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	M_{β_1}
			a_1	a_2	a_{15}	Q_2
				a_7	a_{16}	M_{α_2}
					a_{11}	M_{β_2}
Симметрично						

Таблица 2.14
(матрица)

W_1	α_1	β_1	W_2	α_2	β_2	q / σ
a_1	$-a_2$	a_3	a_4	$-a_5$	a_6	Q_1
	a_7	$-a_8$	$-a_5$	a_9	$-a_{10}$	M_{α_1}
		a_{11}	a_{12}	$-a_{13}$	a_{14}	M_{β_1}
			a_1	$-a_2$	a_{15}	Q_2
				a_7	$-a_{16}$	M_{α_2}
					a_{11}	M_{β_2}
Симметрично						

Суммируя матрицы, приведенные в табл. 2.9, 2.10, 2.11, 2.12 или в табл. 2.9, 2.10, 2.13, 2.14, получим суммарную матрицу жесткости для стержня на упругом основании. Порядок сходимости полученного элемента по перемещениям равен h^4 , а по напряжениям — h^2 . Полученные здесь матрицы жесткости можно использовать для расчета конструкций на винклеровом основании. В этом случае C_1 является коэффициентом Винклера, а $C_2 = 0$.

2.7. Массивные конструкции (трехмерное напряженное состояние)

При расчете массивных тел методом конечных элементов используются зависимости для трехмерного напряженного состояния. Эти зависимости являются наиболее общими, так как свободны от различных гипотез и предположений, характерных для некоторых частных задач (гипотезы плоских сечений для стержня, прямых нормалей для изгибаемых пластин, о нулевых напряжениях, ортогональных плоскости системы, для плоского напряженного состояния и т. п.).

Выражение потенциальной энергии для трехмерного напряженного состояния имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{u})^T \mathbf{D} (\mathbf{B}\mathbf{u}) d\Omega, \quad (2.22)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; ε — вектор деформаций; σ — вектор напряжений; $\mathbf{B}$ — матрица дифференцирования; $\mathbf{D}$ — матрица упругости.

$$\mathbf{u}^T = (u_x, u_y, u_z);$$

$$\varepsilon^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz});$$

$$\sigma^T = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz});$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\nu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}; \quad \nu = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Для решения задач трехмерного напряженного состояния наиболее употребительны конечные элементы в форме тетраэдра и параллелепипеда, имеющие по три степени свободы в узле и полилинейную аппроксимацию перемещений u_x, u_y, u_z .

Конечный элемент в форме тетраэдра. Тетраэдрический КЭ для пространственной задачи (рис. 2.10) является аналогом треугольного КЭ для плоской задачи теории упругости. Введем

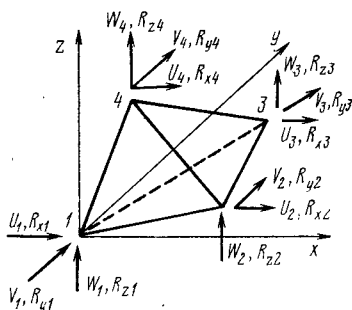


Рис. 2.10

предпосылку, что перемещения вдоль осей x , y , z распределяются по линейному закону, т. е.

$$u_x(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z.$$

Четырем коэффициентам аппроксимирующего полинома ставятся в соответствии четыре степени свободы — перемещения U_1, U_2, U_3, U_4 по направлению оси x в каждом узле. Тогда аппроксимация перемещений в явном виде будет выглядеть так:

$$u_x(x, y, z) = (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)u_1 + (b_2x + c_2y + d_2z)u_2 + (b_3x + c_3y + d_3z)u_3 + (b_4x + c_4y + d_4z)u_4, \quad (2.23)$$

где $a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_3 & z_2 \\ x_3 & y_4 & z_3 \\ x_4 & y_1 & z_4 \end{vmatrix};$

$$b_1 = -(b_2 + b_3 + b_4); \quad b_2 = y_3z_4 - y_4z_3;$$

$$b_3 = y_4z_2 - y_2z_4; \quad b_4 = y_2z_3 - y_3z_2; \quad c_1 = -(c_2 + c_3 + c_4); \quad c_2 = x_4z_3 - x_3z_4;$$

$$c_3 = x_2z_4 - x_4z_2; \quad c_4 = x_3z_2 - x_2z_3; \quad d_1 = -(d_2 + d_3 + d_4); \quad d_2 = x_3y_4 - x_4y_3;$$

$$d_3 = x_4y_2 - x_2y_4; \quad d_4 = x_2y_3 - x_3y_2.$$

Аппроксимация u_y и u_z выглядит аналогично, что обуславливает в каждом узле по три степени свободы.

Этот элемент является совместным. В данном случае $p=1$ и $m=1$ и согласно (1.14), (1.15) порядок сходимости этого элемента по перемещениям равен h^2 , а по напряжениям — h . Матрица жесткости, построенная на основе (1.8), (2.22), (2.23), приведена в табл. 2.15, в которой принято:

$$a_1 = b_1^2 + (c_1^2 + d_1^2) \cdot v_2; \quad a_2 = b_1c_1(v_1 + v_2); \quad a_3 = b_1d_1(v_1 + v_2); \quad a_4 = b_1b_2 + \\ + v_2(c_1c_2 + d_1d_2); \quad a_5 = b_1c_2v_1 + b_2c_1v_2; \quad a_6 = b_1d_2v_1 + b_2d_1v_2; \quad a_7 = b_1b_3 + \\ + v_2(c_1c_3 + d_1d_3); \quad a_8 = b_1c_3v_1 + b_3c_1v_2; \quad a_9 = b_1d_3v_1 + b_3d_1v_2; \quad a_{10} = b_1b_4 + \\ + v_2(c_1c_4 + d_1d_4); \quad a_{11} = b_1c_4v_1 + b_4c_1v_2; \quad a_{12} = b_1d_4v_1 + b_4d_1v_2; \quad a_{13} = c_1^2 + v_2(b_1^2 + d_1^2);$$

Таблица 2.15

(матрица)

U_1	V_1	W_1	U_2	V_2	W_2	U_3	V_3	W_3	U_4	V_4		Степени свободы / Узловые усилия
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	p_{x1}
	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	p_{y1}
		a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	p_{z1}
			a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}	a_{39}	a_{40}	a_{41}	a_{42}	p_{x2}
				a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	a_{48}	a_{49}	a_{50}	p_{y2}
					a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{57}	p_{z2}
						a_{58}	a_{59}	a_{60}	a_{61}	a_{62}	a_{63}	p_{x3}
							a_{64}	a_{65}	a_{66}	a_{67}	a_{68}	p_{y3}
								a_{69}	a_{70}	a_{71}	a_{72}	p_{z3}
									a_{73}	a_{74}	a_{75}	p_{x4}
										a_{76}	a_{77}	p_{y4}
											a_{78}	p_{z4}

Симметрично

$$6V = x_2 b_2 \neq x_3 b_3 + x_4 b_4;$$

$$v_1 = \frac{\mu}{1-\mu}; v_2 = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}.$$

Каждый элемент матрицы умножается на

$$\frac{1}{36V} \cdot \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$\begin{aligned}
a_{14} &= c_1 d_1 (v_1 + v_2); & a_{15} &= c_1 b_2 v_1 + c_2 b_1 v_2; & a_{16} &= c_1 c_2 + v_2 (b_1 b_2 + d_1 d_2); \\
a_{17} &= c_1 d_2 v_1 + c_2 d_1 v_2; & a_{18} &= c_1 b_3 v_1 + c_3 b_1 v_2; & a_{19} &= c_1 c_3 + v_2 (b_1 b_3 + d_1 d_3); \\
a_{20} &= c_1 d_3 v_1 + c_3 d_1 v_2; & a_{21} &= c_1 b_4 v_1 + c_4 b_1 v_2; & a_{22} &= c_1 c_4 + v_2 (b_1 b_4 + d_1 d_4); \\
a_{23} &= c_1 d_4 v_1 + c_4 d_1 v_2; & a_{24} &= [a_1^2 + v_2 (b_1^2 + c_1^2)]; & a_{25} &= d_1 b_2 v_1 + d_2 b_1 v_2; \\
a_{26} &= d_1 c_2 v_1 + d_2 c_1 v_2; & a_{27} &= d_1 d_2 + v_2 (b_1 b_2 + c_1 c_2); & a_{28} &= d_1 b_3 v_1 + d_3 b_1 v_2; \\
a_{29} &= d_1 c_3 v_1 + d_3 c_1 v_2; & a_{30} &= d_1 d_3 v_1 + v_2 (b_1 b_3 + c_1 c_3); & a_{31} &= d_1 b_4 v_1 + d_4 b_1 v_2; \\
a_{32} &= d_1 c_4 v_1 + d_4 c_1 v_2; & a_{33} &= d_1 d_4 + v_2 (b_1 b_4 + c_1 c_4); & a_{34} &= b_2^2 + v_2 (c_2^2 + d_2^2); \\
a_{35} &= b_2 c_2 (v_1 + v_2); & a_{36} &= b_2 d_2 (v_1 + v_2); & a_{37} &= b_2 b_3 + v (c_2 c_3 + d_2 d_3); \\
a_{38} &= b_2 c_3 v_1 + b_3 c_2 v_2; & a_{39} &= b_2 d_3 v_1 + b_3 d_2 v_2; & a_{40} &= b_2 b_4 + v_2 (c_2 c_4 + d_2 d_4); \\
a_{41} &= b_2 c_4 v_1 + b_4 c_2 v_2; & a_{42} &= b_2 d_4 v_1 + b_4 d_2 v_2; & a_{43} &= c_2^2 + v_2 (b_2^2 + d_2^2); \\
a_{44} &= c_2 d_2 (v_1 + v_2); & a_{45} &= c_2 b_3 v_1 + c_3 b_2 v_2; & a_{46} &= c_2 c_3 + v_2 (b_2 b_3 + d_2 d_3); \\
a_{47} &= c_2 d_3 v_1 + c_3 d_2 v_2; & a_{48} &= c_2 b_4 v_1 + c_4 b_2 v_2; & a_{49} &= c_2 c_4 + v_2 (b_2 b_4 + d_2 d_4); \\
a_{50} &= c_2 d_4 v_1 + c_4 d_2 v_2; & a_{51} &= d_2^2 + v_2 (b_2^2 + c_2^2); & a_{52} &= d_2 b_3 v_1 + d_3 b_2 v_2; & a_{53} &= d_2 c_3 v_1 + \\
&+ d_3 c_2 v_2; & a_{54} &= d_2 d_3 + v_2 (b_2 b_3 + c_2 c_3); & a_{55} &= d_2 b_4 v_1 + d_4 b_2 v_2; & a_{56} &= d_2 c_4 v_1 + d_4 c_2 v_2; \\
a_{57} &= d_2 d_4 + v_2 (b_2 b_4 + c_2 c_4); & a_{58} &= b_3^2 + v_2 (c_3^2 + d_3^2); & a_{59} &= b_3 c_3 (v_1 + v_2); \\
a_{60} &= b_3 d_3 (v_1 + v_2); & a_{61} &= b_3 b_4 + v_2 (c_3 c_4 + d_3 d_4); & a_{62} &= b_3 c_4 v_1 + b_4 c_3 v_2; \\
a_{63} &= b_3 d_4 v_1 + b_4 d_3 v_2; & a_{64} &= c_3^2 + v_2 (b_3^2 + d_3^2); & a_{65} &= c_3 d_3 (v_1 + v_2); & a_{66} &= c_3 b_4 v_1 + c_4 b_3 v_2; \\
a_{67} &= c_3 c_4 + v_2 (b_3 b_4 + d_3 d_4); & a_{68} &= c_3 d_4 v_1 + c_4 d_3 v_2; & a_{69} &= a_3^2 + v_2 (b_3^2 + c_3^2); \\
a_{70} &= d_3 b_4 v_1 + d_4 b_3 v_2; & a_{71} &= d_3 c_4 v_1 + d_4 c_3 v_2; & a_{72} &= d_3 d_4 + v_2 (b_3 b_4 + c_3 c_4); \\
a_{73} &= b_4^2 + v_2 (c_4^2 + d_4^2); & a_{74} &= b_4 c_4 (v_1 + v_2); & a_{75} &= b_4 d_4 (v_1 + v_2); & a_{76} &= c_4^2 + \\
&+ v_2 (b_4^2 + d_4^2); & a_{77} &= c_4 d_4 (v_1 + v_2); & a_{78} &= d_4^2 + v_2 (b_4^2 + c_4^2).
\end{aligned}$$

Конечный элемент в форме параллелепипеда. Этот элемент является аналогом для прямоугольного элемента плоского напряженного состояния (рис. 2.11). Аппроксимирующие функции введем из условия, что u_x , u_y , u_z распределяются по линейному закону и не зависят друг от друга. Тогда аппроксимация перемещений в явном виде будет:

$$u_x(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 xz + \alpha_7 yz + \alpha_8 xyz.$$

Восьми коэффициентам аппроксимирующего полинома ставится в соответствие восемь степеней свободы — перемещения u_x по направлению оси x в каждом из восьми узлов элемента. Аппроксимация перемещений в явном виде будет выглядеть так:

Таблица 2.16

(матрица)

U_1	V_1	W_1	U_2	V_2	W_2	U_3	V_3	W_3	U_4	V_4	W_4	U_5	V_5	W_5	U_6	...	W_8	Степени свободы / Узловые усилия
a_1	a_{26}	a_{27}	a_{11}	a_{28}	a_{29}	a_5	$-a_{28}$	$\frac{a_{27}}{2}$	a_6	$-a_{26}$	$\frac{1}{2} a_{29}$	a_7	$\frac{1}{2} a_{26}$	$-a_{29}$	a_8	...	$-\frac{1}{2} a_{27}$	R_{x1}
	a_2	a_{30}	$-a_{28}$	a_{12}	$\frac{1}{2} a_{30}$	a_{28}	a_{13}	a_{31}	$-a_{26}$	a_{14}	$\frac{1}{2} a_{31}$	$\frac{1}{2} a_{26}$	a_{15}	$-a_{31}$	$\frac{1}{2} a_{28}$	...	$-\frac{1}{3} a_{30}$	R_{y1}
		a_3	$-a_{33}$	$\frac{1}{2} a_{30}$	a_{19}	$\frac{1}{2} a_{32}$	$-a_{31}$	a_{20}	$-\frac{1}{2} a_{33}$	$-\frac{1}{2} a_{31}$	a_{21}	a_{33}	a_{31}	a_{22}	$-a_{32}$	...	a_{25}	R_{z1}
			a_1	$-a_{26}$	$-a_{27}$	a_5	a_{23}	$-\frac{1}{2} a_{29}$	a_5	a_{28}	$-\frac{1}{2} a_{27}$	a_8	$-\frac{1}{2} a_{28}$	a_{27}	a_7	...	$-\frac{1}{2} a_{29}$	R_{x2}
				a_2	a_{30}	a_{26}	a_{14}	$\frac{1}{2} a_{31}$	$-a_{28}$	a_{13}	a_{31}	$\frac{1}{2} a_{28}$	a_{16}	$-\frac{1}{2} a_{31}$	$-\frac{1}{2} a_{26}$	...	$-a_{30}$	R_{y2}
					a_3	$\frac{1}{2} a_{33}$	$-\frac{1}{2} a_{21}$	a_2	$-\frac{1}{2} a_{32}$	$-a_{31}$	a_{20}	a_{32}	$\frac{1}{2} a_{31}$	a_{23}	$-a_{33}$	...	a_{24}	R_{z2}
						a_1	$-a_{26}$	a_{27}	a_{11}	$-a_{28}$	a_{29}	a_9	$\frac{1}{2} a_{28}$	$-\frac{1}{2} a_{29}$	a_{10}	...	$-a_{27}$	R_{x3}
							a_2	$-a_{30}$	a_{28}	a_{12}	$-\frac{1}{2} a_{30}$	$-\frac{1}{2} a_{28}$	a_{17}	a_{30}	$\frac{1}{2} a_{26}$	...	$\frac{1}{2} a_{23}$	R_{y3}
								a_3	$-a_{33}$	$-\frac{1}{2} a_{30}$	a_{19}	$\frac{1}{2} a_{33}$	a_{30}	a_{24}	$-\frac{1}{2} a_{32}$	...	a_{23}	R_{z3}
									a_1	a_{26}	$-a_{27}$	a_{10}	$-\frac{1}{2} a_{26}$	$\frac{1}{2} a_{27}$	a_9	...	a_{29}	R_{x4}
										...	...	...	...	...	...	...	...	...
																	a_{30}	R_{y8}
																	a_3	R_{z8}

Симметрично

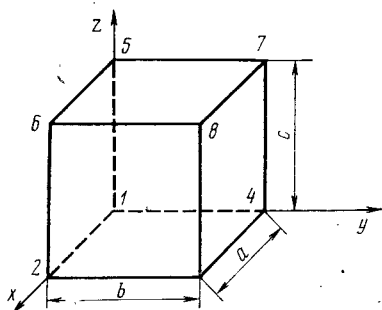


Рис. 2.11

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) = & \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{z}{c}\right) U_1 + \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \times \\
 & \times \left(1 - \frac{z}{c}\right) U_2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \left(1 - \frac{z}{c}\right) U_3 + \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \left(1 - \frac{z}{c}\right) U_4 + \\
 & + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{z}{c} U_5 + \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{z}{c} U_6 + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \times \\
 & \times \frac{z}{c} U_7 + \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c} U_8.
 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Аппроксимация u_y и u_z выглядит аналогично, что обуславливает в каждом узле i по три степени свободы U_i, V_i, W_i . Этот элемент совместный. Координатные функции (2.24) согласно (1.12) имеют порядок аппроксимации $p=1$. Порядок дифференциального оператора A для трехмерной задачи равен $2(m=1)$. Согласно оценкам (1.14), (1.15) использование этого элемента обеспечивает порядок сходимости МКЭ по перемещениям h^2 , а по напряжениям — h .

Матрица жесткости, построенная на основе (1.8), (2.22), (2.24), приведена в табл. 2.16, в которой принято:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{bcv}{9a} + \frac{bc\lambda}{9a} + \frac{abv}{9c} + \frac{acv}{9b}; \quad a_2 = \frac{2acv}{9b} + \frac{ac\lambda}{9b} + \frac{abv}{9c} + \frac{bcv}{9a}; \\
 a_3 &= \frac{2abv}{9c} + \frac{ab\lambda}{9c} + \frac{bcv}{9a} + \frac{acv}{9b}; \\
 a_5 &= \frac{bcv}{9a} + \frac{bc\lambda}{18a} + \frac{abv}{18c} - \frac{acv}{9b}; \quad a_6 = -\frac{bcv}{9a} - \frac{bc\lambda}{18a} + \frac{abv}{36c} - \frac{acv}{18b}; \\
 a_7 &= \frac{bcv}{9a} + \frac{bc\lambda}{18a} - \frac{abv}{9c} + \frac{acv}{18b}; \quad a_8 = -\frac{bcv}{9a} - \frac{bc\lambda}{18a} - \frac{abv}{18c} + \frac{acv}{36b}; \\
 a_9 &= \frac{bcv}{18a} + \frac{bc\lambda}{36a} - \frac{abv}{18c} - \frac{acv}{18b}; \quad a_{10} = -\frac{bcv}{18a} - \frac{bc\lambda}{36a} - \frac{abv}{36c} - \frac{acv}{36b};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{2bcv}{9a} - \frac{bc\lambda}{9a} + \frac{abv}{18c} + \frac{acv}{18b}; \quad a_{12} = \frac{acv}{9b} + \frac{ac\lambda}{18b} + \frac{abv}{18c} - \frac{bcv}{9a}; \\
a_{13} &= -\frac{2acv}{9b} - \frac{ac\lambda}{9b} + \frac{abv}{18c} + \frac{bcv}{18a}; \quad a_{14} = -\frac{acv}{9b} - \frac{ac\lambda}{18b} + \frac{abc}{36c} - \frac{bcv}{18a}; \\
a_{15} &= \frac{acv}{9b} + \frac{ac\lambda}{18b} - \frac{abv}{9c} + \frac{bcv}{18a}; \quad a_{16} = \frac{acv}{18b} + \frac{ac\lambda}{36b} - \frac{abv}{18c} - \frac{bcv}{18a}; \\
a_{17} &= -\frac{acv}{9b} - \frac{ac\lambda}{18b} - \frac{abv}{18c} + \frac{bcv}{36a}; \quad a_{18} = -\frac{acv}{18b} - \frac{ac\lambda}{36b} - \frac{abv}{36c} - \frac{bcv}{36a}; \\
a_{19} &= \frac{abv}{9c} + \frac{ab\lambda}{18c} - \frac{bcv}{9a} + \frac{acv}{18b}; \quad a_{20} = \frac{abv}{9c} + \frac{ab\lambda}{18c} + \frac{bcv}{18a} - \frac{acv}{9b}; \\
a_{21} &= \frac{abv}{18c} + \frac{ab\lambda}{36c} - \frac{bcv}{18a} - \frac{acv}{18b}; \quad a_{22} = -\frac{2abv}{9c} - \frac{ab\lambda}{9c} + \frac{bcv}{18a} + \frac{acv}{18b}; \\
a_{23} &= -\frac{abv}{9c} - \frac{ab\lambda}{18c} - \frac{bcv}{18a} + \frac{acv}{36b}; \quad a_{24} = -\frac{abv}{9c} - \frac{ab\lambda}{18c} + \frac{bcv}{36a} - \frac{acv}{18b}; \\
a_{25} &= -\frac{abv}{18c} - \frac{ab\lambda}{36c} - \frac{bcv}{36a} - \frac{acv}{36b}; \quad a_{26} = \frac{c\lambda}{12} + \frac{cv}{12}; \quad a_{27} = \frac{b\lambda}{12} + \frac{bv}{12}; \\
a_{28} &= \frac{c\lambda}{12} - \frac{cv}{12}; \quad a_{29} = \frac{b\lambda}{12} - \frac{bv}{12}; \quad a_{30} = \frac{a\lambda}{12} + \frac{av}{12}; \quad a_{31} = \frac{a\lambda}{12} - \frac{av}{12}; \\
a_{32} &= \frac{b\lambda}{12} + \frac{bv}{12}; \quad a_{33} = \frac{b\lambda}{12} - \frac{bv}{12}.
\end{aligned}$$

2.8. Многослойные конструкции

Значительный интерес к многослойным оболочкам и пластинам наблюдается в области авиационной и ракетной техники, машиностроения и судостроения, в промышленном, гражданском и транспортном строительстве. Требования надежности и экономичности автомобильных дорог вызывают необходимость строгого анализа работы дорожных одежд как многослойных систем на упругом основании. В работах [53, 54, 55] построена уточненная прикладная теория многослойных пологих оболочек и пластин, способная учитывать особенности деформирования пакета, связанные с ортотропией слоев, с учетом явлений поперечного сдвига и нормального обжатия, со значительным различием в жесткостях и толщинах слоев, их произвольным числом и расположением.

На основе этой теории компоненты напряженно-деформированного состояния, входящие в выражение для потенциальной энергии деформации и необходимые для построения матрицы жесткости конечного элемента, имеют следующий вид.

Вектор перемещений:

$$u = (u_x, u_y, u_z, \psi_1, \psi_2, \psi_3), \quad (2.25)$$

где u_x, u_y, u_z — функции перемещений вдоль осей x, y, z ; ψ_1, ψ_2 — функции, характеризующие поперечный сдвиг в ортогональном направлении; ψ_3 — функция, характеризующая поперечное обжатие.

Вектор обобщенных усилий:

$$\sigma = \{N_{11}, N_{22}, N_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{111}, M_{112}, M_{222}, M_{212}, M_{311}, M_{322}, \\ M_{312}, N_{311}, N_{322}, Q_{33}, -Q_{11}, -Q_{22}\}^T. \quad (2.26)$$

Вектор обобщенных деформаций:

$$\varepsilon' = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, \chi_{11}, \chi_{22}, 2\chi_{12}, \chi_{111}, 2\chi_{112}, \chi_{222}, 2\chi_{212}, \chi_{311}, \chi_{322}, 2\chi_{312}, \varepsilon_{311}, \\ \varepsilon_{322}, \psi_3, \psi_1, \psi_2\}^T. \quad (2.27)$$

Отличные от нуля компоненты матрицы дифференцирования **B**, имеющей размер 18×6 :

$$B_{11} = B_{32} = B_{74} = B_{10,5} = \frac{\partial}{\partial x}; \quad B_{22} = B_{31} = B_{84} = B_{95} = \frac{\partial}{\partial y};$$

$$B_{13} = B_{14,6} = k_{11}; \quad B_{23} = B_{15,6} = k_{22}; \quad B_{16,6} = B_{17,4} = B_{18,5} = 1;$$

$$B_{43} = B_{11,6} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad B_{53} = B_{12,6} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad B_{63} = B_{13,6} = -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.$$

Из структуры элементов дифференциальной матрицы **B** следует, что обобщенные перемещения v_1, v_2, ψ_1 и ψ_2 входят в функционал под оператором первых производных, а W и ψ_3 — под оператором вторых производных. Поэтому их аппроксимации по элементу и соответствующее им число степеней свободы будут разными. Для существования функционала потенциальной энергии необходимо, чтобы аппроксимации u_x, u_y, ψ_i ($i=1, 2$) обеспечивали существование первых производных. Например, в данном случае для треугольного конечного элемента могут быть приняты аппроксимирующие функции типа (2.6), а для прямоугольного — (1.20). Аппроксимация u_z и ψ_3 должна обеспечивать существование вторых производных. Например, для треугольного элемента могут быть приняты аппроксимирующие функции (2.8), а для прямоугольного — (1.25) или (2.6).

Перечисленные аппроксимирующие функции порождают для элемента многослойной плиты по 10 степеней свободы в узле. Ввиду громоздкости получение матрицы жесткости в формульном виде нецелесообразно, так как более удобно получение ее алгоритмически.

ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

3.1. Вариационная постановка задачи. Сходимость МКЭ

Для описания напряженно-деформированного состояния используются зависимости классической деформационной теории упругости [3], для которой справедливы следующие предпосылки:

1) шаровой тензор напряжений прямо пропорционален тензору деформаций ($T_n = E_0 T_{\text{деф}}$), причем модуль объемной деформации (E_0) постоянен на протяжении всего процесса нагружения;

2) девиатор напряжений прямо пропорционален девиатору деформаций. Коэффициент пропорциональности — модуль деформации второго рода $G = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}$ для каждой точки тела зависит от обобщенного напряжения в ней;

3) обобщенное напряжение, возникающее в теле при любой деформации, есть определенная функция обобщенной деформации

$$\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i).$$

Дифференциальное уравнение равновесия задачи имеет вид:

$$\mathbf{B}\sigma + \mathbf{f} = 0, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{B}$ — матрица дифференцирования; $\mathbf{f}$ — вектор внешних воздействий; σ — вектор напряжений.

Без нарушения общности дальнейших выкладок объемными деформациями можно пренебречь. Тогда:

$$\sigma = 3GM\varepsilon = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} M\varepsilon;$$

$$\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad \varepsilon_i = \sqrt{\varepsilon^T \mathbf{M} \varepsilon},$$

где ε — вектор деформаций; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; $\mathbf{M}$ — специально подобранная числовая матрица.

Функционал Лагранжа данной задачи

$$I(u) = - \int_0^1 \int_{\Omega} \mathbf{B}\sigma_i^T(t\varepsilon_i) \mathbf{u} dt - \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u} d\Omega.$$

Воспользовавшись (3.1) и проинтегрировав его по частям, получим

$$I(u) = \int_{\Omega} \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u} d\Omega. \quad (3.2)$$

Покажем, что при выполнении условий

$$\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \geq \beta_2 > 0, \quad \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \geq \beta_1 > 0 \quad (3.3)$$

функционал $I(u)$ будет выпуклым, а следовательно, одноэкстремальным. Для этого вычислим $\frac{d^2}{dt^2} I(u + th)|_{t=0}$.

Имеем [20]

$$j(u, h) \equiv \frac{d^2}{dt^2} I(u + th)|_{t=0} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (DhMDh) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon_i^2} \left(\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \right) (DuMDh) \right\} d\Omega.$$

Из (3.3) и неравенства

$$c_1 \|\varepsilon_i\|_{L_2} \leq \|u\|_{W_2} \leq c_2 \|\varepsilon_i\|_{L_2},$$

$$u \in \overset{\circ}{W}_2^s,$$

получаем

$$j(u, h) \geq c \|u\|_{W_2}^2. \quad (3.4)$$

Откуда следует выпуклость функционала $I(u)$ и единственность решения уравнения (3.1).

Поскольку рассматриваемая задача вариационна, для ее решения может быть применен метод конечных элементов¹. Исследуем сходимость МКЭ для данной задачи, используя результаты работы [20]. Пусть u_h — приближенное решение, полученное по МКЭ на заданной сетке h , а u_h^* — решение, построенное на той же сетке на основе значений степеней свободы, соответствующих точному решению задачи u .

Предположим, что зависимость $\sigma_i(\varepsilon_i)$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \geq \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \geq \beta > 0; \quad \varepsilon_i \in [0, \infty]. \quad (3.5)$$

Из соотношения $I(u) \leq I(u_h) \leq I(u_h^*)$ следует

$$\int_{\Omega} \int_{\varepsilon_i(u)}^{\varepsilon_i(u_h)} \sigma_i d\varepsilon_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \bigg|_u \varepsilon'(u) M\varepsilon(u_h - u) d\Omega \leq \\ \leq \int_{\Omega} \int_{\varepsilon_i(u)}^{\varepsilon_i(u_h^*)} \sigma_i d\varepsilon_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \bigg|_u \varepsilon'(u) M\varepsilon(u_h^* - u) d\Omega. \quad (3.6)$$

¹ Некоторые аспекты решения нелинейных задач механики по МКЭ рассмотрены в работе [46].

Тогда:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\varepsilon_i(u)}^{\varepsilon_i(u_h^*)} \sigma_i d\varepsilon_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \bigg|_u \varepsilon(u) M\varepsilon(u_h^* - u) d\Omega &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \bigg|_u \varepsilon_i^2(u_h^* - u) d\Omega; \\ \int_{\Omega} \int_{\varepsilon_i(u)}^{\varepsilon_i(u_h)} \sigma_i d\varepsilon_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \bigg|_u \varepsilon'(u) M\varepsilon(u_h - u) d\Omega &\geq \\ &\geq \int_0^1 \int_0^t \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \bigg|_{u+t} (u_h - u) \varepsilon_i^2(u_h - u) d\Omega dt dt. \end{aligned}$$

Подставив эти неравенства в (3.6), и воспользовавшись (3.5), получим

$$\int_{\Omega} \varepsilon_i^2(u_h - u) d\Omega \leq c \int_{\Omega} \varepsilon_i^2(u_h^* - u) d\Omega. \quad (3.7)$$

Таким образом, если система координатных функций МКЭ при решении нелинейной задачи удовлетворяет условиям полноты, линейной независимости и принадлежит энергетическому пространству оператора задачи A_0 , то в силу (3.7) справедлива оценка

$$\|u - \bar{u}\|_{A_0} \leq c_1 \|u - u_h^*\|_{A_0} \leq ch^{p+1-m}, \quad (3.8)$$

где $A_0 u = \mathbf{B} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \bigg|_0 \mathbf{M} \mathbf{B} u$ — линейный оператор, соответствующий линейно деформируемой системе, имеющей жесткость, равную касательному модулю упругости в нулевой точке. Отметим, что $\|\cdot\|_{A_0}$ эквивалентна $\|\cdot\|_{W_2^m}$, а следовательно, (3.8) служит оценкой погрешности в W_2^m ,

как и было в (1.15) для линейного случая.

Таким образом получена энергетическая оценка погрешности решения нелинейной задачи. Она имеет такой же вид, как и для линейного случая и является его некоторым обобщением. Из энергетической оценки (3.8) непосредственно следует средняя квадратичная оценка по напряжениям, т. е.

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{h_2} \leq ch^{p+1-m}.$$

Теперь получим оценку погрешности по перемещениям. Для этого применим метод, сходный с приемом Нитше и являющийся его обобщением на нелинейный случай. В работе [20] для данной задачи доказаны следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
| (W(v-u), \Phi)_{L_2} | &\leq c \|u-v\|_{A_u'}^2 \cdot \|\Phi\|_{W_2^p}; \\
\| \frac{\sigma_i(v)}{\varepsilon_i(v)} B_v - \frac{\sigma_i(u)}{\varepsilon_i(u)} B_u - \left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \right)'_u B(v-u) \|_{L_2} &\leq c \|u-v\|_{A_u'}^2; \\
\|v\|_{W_2^{2p}} &\leq c \|A_u' v\|_{L_2}; \quad v, \Phi \in W_2^{2p},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где $W(v-u) = A_v - A_u - A_u'(v-u)$.

Теперь покажем, что имеет место оценка

$$\|u - u_h\|_{L_2} \leq ch^t; \quad t = \begin{cases} 2(p+1-m), & \text{если } p+1 < 2m; \\ p+1, & \text{если } p+1 \geq 2m. \end{cases} \tag{3.10}$$

Пусть $\Phi \in \dot{W}_2^{2m}$ решение уравнения

$$A_u' \Phi = u - u_h, \tag{3.11}$$

а сеточная функция Φ_h удовлетворяет неравенству полноты

$$\|\Phi - \Phi_h\|_{A_u'} \leq ch^{t_0} \|\Phi\|_{W_2^{2m}},$$

$$t_0 = \begin{cases} m, & \text{если } p+1 > 2m \\ p+1-m, & \text{если } p+1 \leq 2m. \end{cases}$$

Тогда на основе (3.11) и очевидного соотношения

$$[\Phi_h, u - u_h]_{A_u'} = (W(u - u_h), \Phi_h)_{L_2}$$

получим

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{L_2}^2 &= (A_u' \Phi, u - u_h)_{L_2} = [\Phi, u - u_h]_{A_u'} = [\Phi - \Phi_h, u - u_h]_{A_u'} + \\
&\quad + (W(u_h - u), \Phi_h)_{L_2}.
\end{aligned}$$

Используя неравенство Буняковского и соотношения (3.9, 3.11), получим

$$\|u - u_h\|_{L_2} \leq ch^t \|\Phi\|_{W_2^{2m}} (\|u\|_{W_2^{2m}} + \|u\|_{W_2^{2m}}^2).$$

Применив неравенство (3.9) и сократив на $\|u - u_h\|_{L_2}$, получим (3.10). Оценка погрешности (3.10) имеет такой же вид, как и в линейном случае.

Таким образом, конечные элементы, координатные функции которых удовлетворяют требованиям полноты, линейной независимости и принадлежат к энергетическому пространству задач, обеспечивают сходимость МКЭ при решении нелинейной задачи с таким же порядком, как и для линейной¹. Переход от средних квадратичных оценок к оценкам для максимальных пог-

¹ В работе [20] рассмотрено также доказательство сходимости МКЭ при решении нелинейной задачи в случае использования несовместных конечных элементов.

решностей в отдельных точках области для нелинейной задачи производится таким же образом, как и для линейной задачи (см. п. 1.2).

3.2. Построение нелинейных разрешающих уравнений МКЭ

Для нелинейной задачи разрешающая система уравнений имеет вид

$$K(q) \cdot q = F. \quad (3.12)$$

Отличие от аналогичного выражения (1.5) для линейной задачи заключается в том, что коэффициенты матрицы жесткости зависят от степеней свободы, что по сути и обуславливает нелинейность задачи.

Из выражения для градиента функционала (3.2), вытекает формула вычисления элемента $K_{ej,r}$ матрицы жесткости:

$$K_{ej,r} = \int_{\Omega_r} \frac{\sigma_i(u)}{\varepsilon_i(u)} \varepsilon^T(\varphi_e) M_e(\varphi_j) d\Omega_r. \quad (3.13)$$

Это выражение является основным при построении матриц жесткости r конечного элемента для нелинейно упругого тела.

Для линейного случая $\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} M$ — матрица, независимая от u и (3.13), превращается в известное выражение для построения матриц жесткости линейно упругих тел.

Анализируя (3.13), видим, что в выражение для $K_{ej,r}$ будут входить неизвестные степени свободы q_e ; причем так как в выражении для ε_i они будут стоять под знаком радикала, то получение $K_{ej,r}$ в явном виде весьма затруднительно. Можно указать по крайней мере два случая, когда это возможно:

1) зависимость $\sigma_i(\varepsilon_i)$ содержит только нечетные степени ε_i . Тогда $\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$ содержит только четные степени и радикал исчезает;

2) вид напряженного состояния позволяет выразить ε_i через деформации без использования радикала. Например, для одноосного напряженного состояния $\varepsilon_i = \varepsilon_x$.

На простейшем примере покажем составление нелинейных разрешающих уравнений МКЭ в явном виде.

Система представляет собой закрепленную по трем сторонам балку-стенку (рис. 3.1, а). Конечные элементы имеют единичные размеры. Система расчленена на два элемента, что обуславливает наличие одного узла с двумя степенями свободы U и V . В узле приложены две внешние силы P_x и P_y . Зависимость $\sigma_i(\varepsilon_i) = A\varepsilon_i - B\varepsilon_i^3$ представлена на рис. 3.1, б и задана в интервале

$$\left(-\sqrt{\frac{A}{2B}}, \sqrt{\frac{A}{2B}} \right).$$

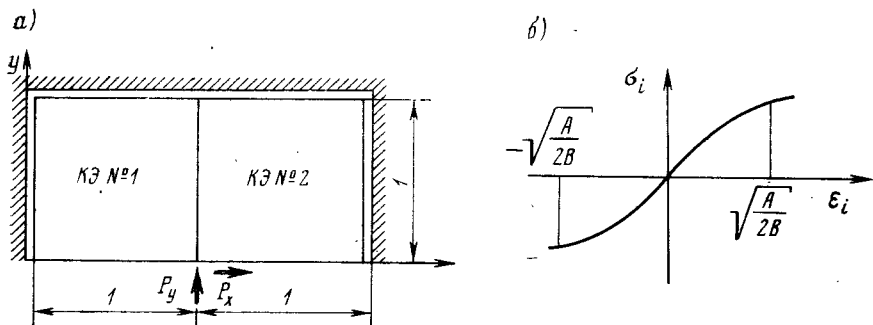


Рис. 3.1

Для плоского напряженного состояния выражение (3.13) примет вид:

$$K_{\epsilon j, r} = \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 (A - B \epsilon_i^2(u)) \left[\epsilon_x(\varphi_e) \epsilon_x(\varphi_j) + \frac{1}{2} \epsilon_x(\varphi_e) \epsilon_y(\varphi_j) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \epsilon_y(\varphi_e) \epsilon_x(\varphi_j) + \epsilon_y(\varphi_e) \epsilon_y(\varphi_j) + \frac{1}{4} \gamma_{xy}(\varphi_e) \gamma_{xy}(\varphi_j) \right] dx dy, \\ \epsilon_i^2 = \frac{4}{3} \left(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_x \epsilon_y + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 \right). \quad (3.14)$$

Построим матрицу жесткости для первого конечного элемента. Примем полилинейные аппроксимирующие функции. Тогда горизонтальные перемещения по области Ω_r определяются из выражения $U = x(1-y) U = \varphi_1 U$, а вертикальные из $V = x(1-y) V = \varphi_2 V$.

Имеем:

$$\epsilon_x = (1-y)U; \quad \epsilon_y = -xV; \quad \gamma_{xy} = -xV + (1-y)V; \quad \frac{3}{4} \epsilon_i^2 = (1-y)^2 U^2 + \\ + x^2 V^2 - (1-y)xUV + \frac{1}{4} [(1-y)V + xU]^2.$$

Подставляя значения φ_1 , φ_2 и ϵ_i в (3.14) и произведя интегрирование, получим матрицу жесткости для первого КЭ (табл. 3.1). Для второго КЭ:

$$u = (1-x)(1-y)U = \varphi_1 U; \\ v = (1-x)(1-y)V = \varphi_2 V;$$

$$\epsilon_x = (1-y)U; \quad \epsilon_y = -(1-x)V; \quad \gamma_{xy} = -(1-x)U - (1-y)V; \quad \frac{3}{4} \epsilon_i^2 = \\ = (1-y)^2 U^2 + (1-x)V^2 + (1-x)(1-y)UV + \frac{1}{4} [(1-x)U + (1-y)V]^2.$$

Матрица жесткости второго КЭ представлена в табл. 3.2.

Для линейно упругого тела (т. е. при $B=0$, $\sigma_i = A \epsilon_i$) элементы полученных матриц жесткости будут содержать члены, в кото-

Таблица 3.1
(матрица)

$\begin{array}{c} q \\ \sigma \end{array}$	U	V
R_U	$\frac{5}{9} A - \frac{16}{9} B \left[\frac{193}{720} U^2 + \frac{157}{720} V^2 - \frac{15}{64} UV \right]$	$\frac{A}{4} - \frac{16}{9} B \left[\frac{UV}{8} - \frac{15}{128} (U^2 + V^2) \right]$
R_V	$\frac{A}{4} - \frac{16}{9} B \left[\frac{UV}{8} - \frac{15}{128} (U^2 + V^2) \right]$	$\frac{5}{9} A - \frac{16}{9} B \left[\frac{157}{720} U^2 + \frac{193}{720} V^2 - \frac{15}{64} UV \right]$

Таблица 3.2
(матрица)

$\begin{array}{c} q \\ \sigma \end{array}$	U	V
R_U	$\frac{5}{9} A - \frac{16}{9} B \left[\frac{193}{720} U^2 + \frac{157}{720} V^2 + \frac{15}{64} UV \right]$	$\frac{A}{4} - \frac{16}{9} B \left[\frac{1}{8} UV + \frac{15}{128} (U^2 + V^2) \right]$
R_V	$\frac{A}{4} - \frac{16}{9} B \left[\frac{1}{8} UV + \frac{15}{128} (U^2 + V^2) \right]$	$\frac{5}{9} A - \frac{16}{9} B \left[\frac{193}{720} U^2 + \frac{157}{720} V^2 + \frac{15}{64} UV \right]$

рые входит A . Их величины будут равны общеизвестным выражениям для линейно упругого прямоугольного элемента при $a=b=\delta=1$, $E=A$ и $\mu=0,5$.

Общую матрицу жесткости системы получим, производя соответствующее суммирование:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} A - \frac{2}{405} B [157 U^2 + 193 V^2], & \frac{1}{4} A - \frac{4}{9} BUV, \\ \frac{1}{4} A - \frac{4}{9} BUV, & \frac{10}{9} A - \frac{2}{405} B [157 U^2 + 193 V^2] \end{bmatrix}.$$

Система разрешающих уравнений (3.12) для данного случая:

$$\begin{aligned} \frac{10}{9} AU - \frac{386}{405} BU^3 - \frac{314}{405} BU^2V + \frac{1}{4} AV - \frac{4}{9} BUV^2 &= P_x; \\ \frac{1}{4} AU - \frac{4}{9} BU^2V + \frac{10}{9} AV - \frac{314}{405} BU^2V - \frac{384}{405} BV^3 &= P_y. \end{aligned}$$

Как и ожидалось, эта система нелинейна относительно неизвестных степеней свободы U и V .

Составление разрешающих нелинейных уравнений даже для таких простых систем достаточно сложно. Получить такие уравнения в явном виде относительно неизвестных перемещений удается крайне редко, так как интегрирование выражения (3.13) в общем виде может быть затруднено как сложностью функции $\sigma_i(\epsilon_i)$, так и наличием радикала, обусловленного формулой для вычисления ϵ_i . Таким образом, как правило, информация о структуре нелинейных уравнений будет не в виде аналитических выражений, а в виде набора алгоритмов, по которым можно получить тот или иной коэффициент системы нелинейных уравнений.

Все это обуславливает использование таких методов решения нелинейных уравнений, которые были бы основаны на их линеаризации и не требовали получения нелинейных уравнений в явном виде, а довольствовались алгоритмической записью их коэффициентов.

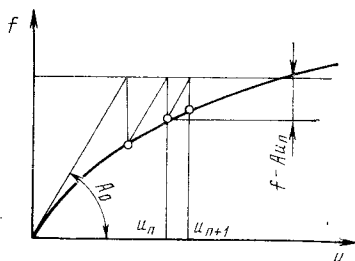
3.3. Решение систем нелинейных уравнений

Все методы, рассматриваемые ниже, основаны на линеаризации нелинейных уравнений, т. е. поиск решения нелинейных уравнений осуществляется решением рекуррентной последовательности линейных.

Если исходные уравнения задаются алгоритмически, то имеется возможность составить алгоритм построения линеаризованных уравнений. Некоторые рассматриваемые ниже методы часто применяются для решения нелинейных задач (метод упругих решений, метод переменных параметров, метод последовательных нагружений).

Некоторые из них сравнительно мало известны (метод одного параметра, метод последовательных жесткостей), хотя в ряде случаев достаточно эффективны. Для каждого метода приводится схема процесса приближений, приложение этой схемы к разрешающим уравнениям МКЭ, геометрическая интерпретация процесса приближений для одномерного случая, доказательство

Рис. 3.2



сходимости, а для метода последовательных нагружений — оценка погрешности¹.

Метод упругих решений. Он применялся в работах многих авторов и является самым распространенным для решения физически нелинейных задач.

Представим разрешающие уравнения в операторном виде:

$$A u = f, \quad (3.15)$$

где A — нелинейный оператор задачи; u — искомая разрешающая функция; f — внешняя нагрузка.

Схема итерационного процесса для метода упругих решений будет выглядеть следующим образом:

$$A_0(u_{n+1} - u_n) = f - A u_n, \quad (3.16)$$

где A_0 — линейный оператор рассматриваемой системы, если считать, что она линейно деформируема и имеет модуль упругости E_0 ; u_{n+1} , u_n — приближенные значения разрешающей функции на $n+1$ и n этапах итерационного процесса.

Для одномерного случая итерационный процесс допускает геометрическую интерпретацию (рис. 3.2).

В математике аналогом этого метода служит упрощенный метод Ньютона. В физическом смысле метод упругих решений означает итерационный поиск таких дополнительных нагрузок, которые сообщают линейно деформируемому телу перемещения, равные перемещениям нелинейного тела под заданную нагрузку. В связи с этим метод часто называют методом дополнительных нагрузок. Жесткостные характеристики, обуславливающие оператор A_0 , назначаются заранее. Как правило, начальный модуль деформации E_0 , который определяет A_0 , назначается для состояния, когда отсутствуют напряжения и деформации, т. е.

$$E_0 = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \sigma_i (\varepsilon_i = 0).$$

Для $n+1$ итерации l ($l=1, 2, \dots, L$) уравнение метода конечных элементов будет

¹ При доказательстве сходимости методов используются результаты работы [21].

$$\sum_{r \in l_1} K_{l_1, r}^{(0)} q_1^{n+1} + \dots + \sum_{r \in l_j} K_{l_j, r}^{(0)} q_j^{(n+1)} + \dots + \sum_{r \in l_r} K_{l_r, r}^{(0)} q_r^{(n+1)} =$$

$$= P_l + \sum_{j=1}^L \sum_{r \in l_j} K_{l_j, r}^{(0)} q_j^{(n)} - \sum_{j=1}^L \sum_{r \in l_j} K_{l_j, r} q_j^{(n)}, \quad (3.17)$$

где P_l — внешняя нагрузка по направлению l степени свободы; $K_{l_j, r}^{(0)}$ — элемент матрицы жесткости r элемента, полученный для линейно упругого тела с модулем упругости E_0 ; $q_j^{(n+1)}$ — искомые компоненты вектора степеней свободы на $n+1$ итерации; $q_j^{(n)}$ — компоненты вектора степеней

свободы, найденные на n итерации; $\sum_{j=1}^L \sum_{r \in l_j} K_{l_j, r}^{(0)} q_j^{(n)} = \sum_{r \in l} F_{rl}^{(n)}$ —

отпор нелинейно деформируемой системы, имеющей перемещения $q^{(n)}$ по направлению l степени свободы. Здесь $K_{l_j, r}$ — элемент матрицы жесткости элемента, построенный с учетом физической нелинейности материала, а $F_{rl}^{(n)}$ — узловое усилие r конечного элемента по направлению l степени свободы, соответствующее напряженно-деформированному состоянию элемента на n этапе.

Сходимость метода упругих решений была доказана в работе [75] при помощи построения сходящейся мажорантной последовательности для значений дополнительных нагрузок. При этом на функцию $\sigma_i(\varepsilon_i)$ были наложены ограничения

$$\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \geq \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \geq \beta > 0.$$

Покажем, что функционалы, соответствующие приближенно-му решению задачи на каждой итерации, образуют минимизирующую последовательность, т. е.

$$I(u_{n+1}) < I(u_n) < I(u_{n-1}) < \dots < I(u_0).$$

Основываясь на выражении для функционала (3.2) и приняв обозначения

$$\varepsilon_l(u_{n+1}) = \varepsilon_{l, n+1}, \quad \varepsilon_l(u_n) = \varepsilon_{l, n}, \quad \sigma_l(\varepsilon_n) = \sigma_{l, n}, \quad h_n = u_{n+1} - u_n,$$

из (3.16) получим:

$$I(u_{n+1}) = I(u_n) + \int_{\Omega} \int_{\varepsilon_{l, n}}^{\varepsilon_{l, n+1}} \sigma_l d\varepsilon_l d\Omega -$$

$$- \int_{\Omega} A_0 h_n h_n d\Omega - \int_{\Omega} A u_n, h_n d\Omega.$$

Подставив в это выражение неравенство [21]

$$\int_{\varepsilon_{l, n}}^{\varepsilon_{l, n+1}} \sigma_l d\varepsilon_l \leq \frac{\sigma_{l, n}}{\varepsilon_{l, n}} \left[\varepsilon(u_n) M \varepsilon(h_n) + \frac{\varepsilon_l^2(h_n)}{2} \right], \quad (3.18)$$

интегрируя по частям и учитывая однородность граничных условий, получим

$$I(u_{n+1}) \leq I(u_n) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\sigma_i, 0}{\varepsilon_i, 0} \varepsilon_i^2(h_n) d\Omega = I(u_n) - \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \Big|_0 \int_{\Omega} \varepsilon_i^2(h_n) d\Omega \leq I(u_n),$$

т. е. монотонно убывающую последовательность $I(u_n)$. Из ее ограниченности снизу следует, что $I(u_n)$ сходится, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (I(u_n) - I(u_{n+1})) = 0$.

Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_{n+1}\|_{W_2^1} = 0$,

где u — точное решение.

На основе (3.16) запишем

$$\int_{\Omega} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \Big|_0 \varepsilon' (u_{n+1} - u_n) M \varepsilon (u - u_n) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \Big|_u \varepsilon (u) - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \Big|_{u_n} u_n \right. \\ \left. \times \varepsilon (u_n)^* \right) M \varepsilon (u - u_n) d\Omega = \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \Big|_{\tilde{u}_n} \varepsilon' (\tilde{u}_n) \right) M \varepsilon (u - u_n) dt d\Omega,$$

где $\tilde{u}_n = u_n + t(u - u_n)$.

Тогда

$$\int_{\Omega} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \Big|_0 \varepsilon_i^2(u_{n+1} - u_n) d\Omega \geq \frac{\left[\int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \Big|_{\tilde{u}_n} \varepsilon_i(u - u_n) dt d\Omega \right]^2}{\int_{\Omega} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \Big|_0 \varepsilon_i^2(u - u_n) d\Omega}. \quad (3.19)$$

Учитывая, что зависимость $\sigma_i(\varepsilon_i)$ удовлетворяет условию $\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \geq \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \geq \beta \geq 0$, $\left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \Big|_0 = E_0 \right)$,

из последнего неравенства получим

$$E_0^2 \int_{\Omega} \varepsilon_i^2(u_{n+1} - u_n) d\Omega \geq \beta^2 \int_{\Omega} \varepsilon_i^2(u - u_n) d\Omega.$$

Ранее было показано, что последовательность $I(u_n)$ монотонно убывающая и ограничена снизу, из чего следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varepsilon_i^2(u_{n+1} - u_n) d\Omega = 0,$$

следовательно, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varepsilon_i^2(u - u_n) d\Omega = 0$.

Таким образом, в силу положительной определенности оператора линейной задачи получим $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{W_2^n} = 0$,

что и требовалось доказать.

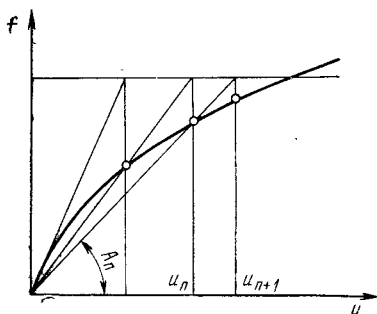


Рис. 3.3

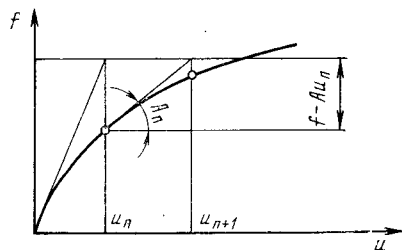


Рис. 3.4

Метод переменных параметров. Он впервые предложен в работе [6] и часто фигурирует как метод Биргера. Если разрешающие уравнения представлены в виде (3.15), то схема итерационного процесса выглядит так:

$$A_n u_{n+1} = f, \quad (3.20)$$

где A_n — линейный оператор рассматриваемой системы, если считать, что она линейно деформируема и имеет коэффициент пропорциональности между девиаторами напряжений и деформаций, равный $\frac{\sigma_{i,n}}{\varepsilon_{i,n}}$.

Для одномерного случая итерационный процесс (3.20) допускает геометрическую интерпретацию (рис. 3.3).

В математике аналогом метода служит метод секущих. В физическом смысле метод переменных параметров означает итерационный поиск такой линейно упругой системы (линейный оператор A_n соответствует модулю G_n , который, естественно, переменен по области Ω), которая под заданную нагрузку f имеет такие же перемещения, как и линейно деформируемая система (нелинейный оператор A). Начальный линейный оператор A_0 соответствует $\frac{\sigma_{i,0}}{\varepsilon_{i,0}} = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i} = 0$.

Для $n+1$ итерации l ($l = 1, 2, \dots, L$) уравнение метода конечных элементов будет иметь вид:

$$\sum_{r \in I_l} K_{l,r}^{(n)} q_{1,n+1} + \dots + \sum_{r \in I_j} K_{l,j,r}^{(n)} q_{j,n+1} + \dots + \sum_{r \in I_L} K_{l,L,r}^{(n)} q_{L,n+1} = P_l, \quad (3.21)$$

где $K_{l,j,r}^{(n)}$ — элемент матрицы жесткости r элемента.

Матрица жесткости $K_r^{(n)}$ строится, как для линейно упругого тела с переменным по области Ω_r модулем $G_n = \frac{\sigma_{i,n}}{3\varepsilon_{i,n}}$.

Так же как и для метода упругих решений, доказательство сходимости метода переменных параметров построим на основе

образования минимизирующей последовательности функционалов. Докажем, что

$$I(u_{n+1}) < I(u_n).$$

Из (3.19), (3.20) получаем

$$\begin{aligned} I(u_{n+1}) &\leq I(u_n) + \int_{\Omega} \frac{\sigma_{i,n}}{\varepsilon_{i,n}} \varepsilon(u_n) M \varepsilon(h_n) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\sigma_{i,n}}{\varepsilon_{i,n}} \varepsilon_i^2(h_n) d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} A_n u_n h_n d\Omega - \int_{\Omega} A_n u_n, h_n d\Omega = I(u_n) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\sigma_{i,n}}{\varepsilon_{i,n}} \varepsilon_i^2(h_n) d\Omega. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon_i^2(h_n) \geq 0$ и $\frac{\sigma_{i,n}}{\varepsilon_{i,n}} \geq 0$ по условию, что $I(u_{n+1}) \geq I(u_n)$ и потому последовательность $I(u_n)$ — монотонно убывающая и ограниченная снизу.

Доказательство того, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varepsilon_i^2(u - u_n) d\Omega = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L_2} = 0.$$

для метода переменных параметров проводится [21] на основе тех же рассуждений, что и для метода упругих решений.

Метод касательных модулей. Он имеет следующую вычислительную схему:

$$A_n \Delta u_{n+1} = f - A u_n; \quad u_{n+1} = u_n + \Delta u_{n+1}, \quad (3.22)$$

где Δu_{n+1} — приращение разрешающей функции на $n+1$ этапе; A_n — линейный оператор рассматриваемой задачи, который соответствует линейно деформируемой системе с коэффициентом пропорциональности между девиаторами напряжений и деформаций $G_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{d\varepsilon_i} \sigma_i|_{u_n}$.

Математическим аналогом метода касательных модулей является метод Ньютона—Рафсона—Канторовича. Для одномерного случая итерационный процесс (3.22) допускает геометрическую интерпретацию (рис. 3.4). На $n+1$ итерации l ($l=2, \dots, L$) уравнение метода конечных элементов будет иметь вид:

$$\sum_{r \in l_1} K_{l_1, r}^{(n)} \Delta q_1^{(n+1)} + \dots + \sum_{r \in l_L} K_{l_L, r}^{(n)} \Delta q_L^{(n+1)} = P_l - \sum_{j=1}^L \sum_{r \in l_j} K_{l_j, r} q_j^{(n)}, \quad (3.23)$$

где $\sum_{j=1}^L \sum_{r \in l_j} K_{l_j, r} q_j^{(n)} = \sum_{r \in l} F_{l, r}^{(n)}$ — отпор нелинейно деформируемой системы, имеющей перемещения $(q)^{(n)}$ по направлению l степени свободы; $K_{l_j, r}^{(n)}$ — элемент линеаризованной матрицы жесткости элемента.

В работе [32] показано, что метод сходится при условии, что первое приближение достаточно близко отстоит от точного решения. Проверка этого условия представляет значительные затруднения. Используя специфику задачи, покажем, что при

$\frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} > \frac{d\sigma_l}{d\varepsilon_l} \geq \beta > 0$ метод Ньютона — Канторовича не зависит от начального приближения. Разрешающее уравнение для данной задачи можно представить в виде $B_* \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} B_* u = f$, где $B_* :=$

$M_1^{\frac{1}{2}} D$. Предполагается, что задача имеет решение $u^* \in W_2^2$, т. е.

$$B_* \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} B_* u^* = f.$$

Обозначим $B_* u = v$, $B u^* = v^*$, $\varepsilon \sqrt{(v, v)} = |v|$.

Схема метода Ньютона — Канторовича в данном случае

$$-B^* \left[\frac{\sigma' \varepsilon - \sigma}{\varepsilon^3} \right]_{v_n} (h_n v_n) v_n + \frac{\sigma}{\varepsilon} \left[\right]_{v_n} h_n = D \left[\frac{\sigma}{\varepsilon} \right]_{v_n} v_n - \frac{\sigma}{\varepsilon} \left[\right]_{v_n} v^*, \quad (3.24)$$

где $h_n = v_{n+1} - v_n$; $v_0 = 0$.

Интегрированием по частям устанавливаем, что если при любом x выполнено неравенство

$$\frac{\sigma' \varepsilon - \sigma}{\varepsilon^3} \left[\right]_{v_n} (h_n v_n) v_n + \frac{\sigma}{\varepsilon} \left[\right]_{v_n} h_n = \frac{\sigma}{\varepsilon} \left[\right]_{v^*} v^* - \frac{\sigma}{\varepsilon} \left[\right]_{v_n} v_n, \quad v_0 = 0, \quad (3.25)$$

то справедливо и (3.24).

Из (3.25) следует

$$\sigma'(z_n) (z_{n+1} - z_n) = \sigma(z^*) - \sigma(z_n), \quad z_0 = 0, \quad (3.26)$$

где $z_n = \gamma_n |v|$, $z^* = |v^*|$, т. е. уравнения (3.26) являются методом Ньютона решения одномерного уравнения $\sigma(z) = \sigma(z^*)$.

В работе [21] показано, что

$$z^* - z_n \leq \chi^n (z^* - z_0) = \chi^n z^*,$$

где $\chi = 1 - \frac{\sigma'(z^*)}{\sigma(0)}$.

Таким образом:

$$(z^* = |v^*|; z_n = \gamma_n |v^*|);$$

$$(1 - \gamma_n) |v^*| \leq \chi^n |v^*|; |v^* - v_n| \leq \chi^n |v^*|.$$

Если $\max |\mathbf{v}^*| \leq K$, то $\max |\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_n| \leq K\chi^n$.
 Так как $\mathbf{v}_n = \mathbf{B}\mathbf{u}_n$, $\mathbf{v}^* = \mathbf{B}\mathbf{u}^*$, то $\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_n = \mathbf{B}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_n)$, откуда
 $|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_n|_{c^1} \leq c_1 |\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_n| \leq c_2 \chi^n$.

Эта оценка указывает на быструю сходимость метода, хотя и несколько занижена. После некоторого числа n итераций приближение N будет удовлетворять условиям Канторовича и при $\mathbf{u}_n$ будет справедлива более высокая оценка погрешности:

$$|\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_n|_{c^1} \leq c_2 \chi^{2n}.$$

Метод одного параметра. Метод имеет следующую схему итераций. Разрешающая функция на $n+1$ этапе

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \alpha_{n+1} \Delta \mathbf{u}_{n+1}. \quad (3.27)$$

Приращение $\Delta \mathbf{u}_{n+1}$ определяется из решения системы линейных уравнений

$$\mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{u}_n. \quad (3.28)$$

Поправочный параметр α_{n+1} определяется из решения одного нелинейного уравнения типа:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{A}(\mathbf{u}_n + \alpha_{n+1} \Delta \mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}] \Delta \mathbf{u}_{n+1} \cdot d\Omega = 0. \quad (3.29)$$

Условие (3.29) по сути представляет собой равенство нулю суммарной работы нагрузочных невязок (выражение в квадратной скобке) на приращение перемещений, найденных на $n+1$ этапе. Выражение (3.28) аналогично выражению (3.16) для метода упругих решений. Для одномерного случая геометрическая интерпретация не имеет смысла, так как на первом же этапе находится точное решение.

Для метода конечных элементов уравнения, соответствующие (3.28), полностью аналогичны (3.17) метода упругих решений. Выражение же (3.29) для МКЭ выглядит так:

$$\sum_{l=1}^L \left[\sum_{j=1}^L \sum_{r \in I_j} K_{lj,r} (q_{j,n} + \alpha_{n+1} \Delta q_{j,n+1}) - P_l \right] \Delta q_{l,n+1}.$$

Хотя из одного нелинейного уравнения (3.29) необходимо найти один параметр α_{n+1} , задача достаточно сложна. Сложность обусловливается построением этого уравнения. Ведь компоненты матрицы жесткости $K_{lj,r}$, в свою очередь, зависят от $(q)_n$, а эта зависимость может быть настолько сложной, что возможна только алгоритмическая запись.

Численные эксперименты дают основание предположить, что α необходимо вычислять только на одном-двух первых этапах, а затем, отказавшись от сложного уравнения (3.29) и принимая

$\alpha=1$, превратить схему этого метода в схему метода упругих решений.

Поскольку схема метода одного параметра (3.28) аналогична схеме (3.16) для метода упругих решений, то для доказательства сходимости этого метода достаточно показать, что выбор параметра α по формуле (3.29) обеспечивает минимизирующую последовательность функционалов. Для этого рассмотрим функционал задачи, соответствующий решению $u_{n+1} = u_n + \alpha_{n+1} \Delta u_{n+1}$:

$$I(u_n + \alpha_{n+1} \Delta u_{n+1}) = \int_{\Omega} \int_0^{\epsilon_i(u_n + \alpha_{n+1} \Delta u_{n+1})} \sigma_i d\epsilon_i - \int_{\Omega} f(u_n + \alpha_{n+1} \Delta u_{n+1}) d\Omega$$

и найдем α_{n+1} из уравнения

$$\frac{d}{d\alpha_{n+1}} I(u_n + \alpha_{n+1} \Delta u_{n+1}) = 0.$$

Вычислив $\frac{d}{d\alpha} I(u + \alpha \Delta u)$, получим уравнения (3.29), т. е.

$$I(u_{n+1}) \leq I(u_n).$$

Этот метод эффективен для быстрого получения грубых приближений.

Некоторые разновидности шаговых методов. Рассматриваемые метод последовательных жесткостей и ряд модификаций шаговых методов единообразно укладываются в схему известного в прикладной математике метода дифференцирования по параметру (методы продолжения)¹. Методы продолжения использовались для доказательства существования решения еще в прошлом столетии [84]. Впервые этот метод для численного решения систем нелинейных уравнений был применен, по-видимому, Лазеком [82]. Кроме того Д. О. Давыденко [22] применил метод дифференцирования по параметру к широкому классу задач, в том числе и для решения систем нелинейных уравнений. В ряде более поздних работ [10, 74] эти методы были снабжены четким физическим смыслом, что обусловило их широкое распространение при решении различных нелинейных задач механики.

Метод последовательных жесткостей. Метод заключается в том, что на основе нелинейного оператора задачи A образуется нелинейный оператор tA таким образом, чтобы при $t=1$, $tA=A$. Процесс начинается с того, что находится значение, для которого можно решить систему $t_0 A u^{(0)} = f$. Дальнейший расчет производится поэтапным изменением t от t_0 до 1. Вычислительная схема имеет вид:

$$t_{n+1} A_n \Delta u_{n+1} = f - t_{n+1} A u_n, \quad (3.30)$$

где A_n — линейный оператор, аналогичный схеме (3.22).

¹ Об истории вопроса этих очень распространенных методов достаточно полно написано в работе [84].

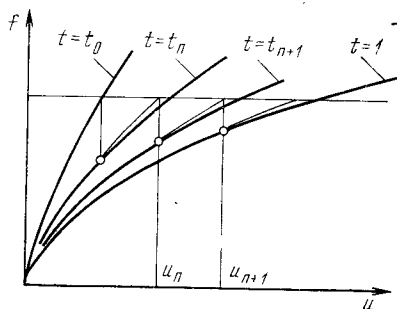


Рис. 3.5

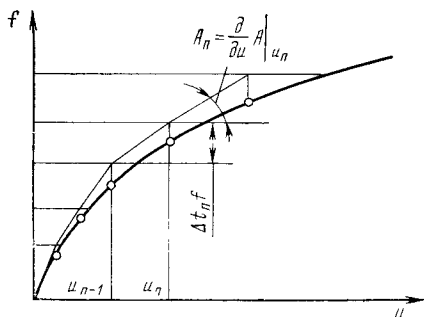


Рис. 3.6

Процесс продолжается до тех пор, пока t не станет равным 1. Величины Δt необходимо принимать такими, чтобы пренебрежение высшими степенями $\Delta u_{n+1}^i (i > 1)$ не превышало заданную точность решения задачи. В физическом смысле этот процесс можно трактовать как постепенное изменение жесткости системы. Сначала жесткость системы назначается настолько большой ($t_0 \gg 1$), чтобы под заданную нагрузку f работа системы была близка к линейной, тогда u_0 найдется из уравнения $t_0 A_0 u_0 = f$.

Для одномерного случая итерационный процесс (3.30) допускает геометрическую интерпретацию (рис. 3.5). На итерации l ($l = 1, 2, \dots, L$) уравнение метода конечных элементов будет

$$t_{n+1} \sum_{r \in I_1} K_{l,1,r}^{(n)} \Delta q_{1,n+1} + \dots + t_{n+1} \sum_{r \in I_j} K_{l,j,r}^{(n)} \Delta q_{j,n+1} + \dots + t_{n+1} \sum_{r \in I_L} K_{l,L,r}^{(n)} \Delta q_{L,n+1} = P_l - t_{n+1} \sum_{j=1}^L \sum_{r \in I_l} K_{l,j,r} \cdot q_{j,n}. \quad (3.31)$$

Здесь все обозначения, да и само выражение, за исключением множителя t_{n+1} , аналогично (3.23).

Из (3.30) можно получить несколько видоизмененную схему метода: $A_n \Delta u_{n+1} = \frac{f}{t_{n+1}} - A u_n$.

Ниже рассмотрена одна из модификаций метода последовательных нагружений с учетом нагрузочных невязок. Схема этого метода полностью совпадает с ранее приведенной при выборе шага на $n+1$ этапе $\Delta_{n+1} = \frac{1}{t_{n+1}}$.

Таким образом, сходимость метода последовательных деформаций и оценка погрешности в данном случае будут такими же, как в методе последовательных приближений с учетом нагрузочных невязок, и, как будет показано ниже, имеют вид:

$$\|u - u_N\|_{L_2} \leq c \frac{\|f\|^2}{N^2}, \quad (3.32)$$

где N — число шагов; u_N — приближенное решение, полученное за N шагов.

Простая модификация метода последовательных нагружений. Она имеет следующую вычислительную схему:

$$A_n \Delta u_{n+1} = \Delta t_{n+1} f, \quad u_{n+1} = u_n + \Delta u_{n+1},$$

где A_n — линейный оператор типа (3.22).

В физическом смысле этот процесс можно трактовать как постепенное увеличение нагрузки, начинающееся от 0 и заканчивающееся заданным f .

Геометрическая интерпретация метода для одномерного случая приведена на рис. 3.6. На $n+1$ итерации l ($l=1, 2, \dots, L$) уравнение метода конечных элементов будет:

$$\begin{aligned} \sum_{r \in I_1} K_{l_1, r}^{(n)} \Delta q_{1, n+1} + \dots + \sum_{r \in I_j} K_{l_j, r}^{(n)} \Delta q_{j, n+1} + \dots + \\ + \sum_{r \in I_L} K_{l_L, r}^{(n)} \Delta q_{L, n+1} = \Delta t_{n+1} P_l, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $K_{l_j, r}^{(n)}$ — аналогично (3.23),

Исследуем сходимость рассматриваемой модификации. Вычислительную схему (3.32) метода представим в виде:

$$u_{n+1} = u_n + B(A u_n) \frac{f}{N}; \quad u_0 = 0; \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим элементы $u_n \in W_2^{2m}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) решения уравнений, т. е. u_n^* — точное решение задачи, соответствующее нагрузке на n шаге ($u_n^* = u$ — точное решение задачи). В работе [21] показано, что оператор задачи A удовлетворяет условию Липшица. Тогда, пользуясь обобщенной формулой Ньютона — Лейбница, получим:

$$\begin{aligned} u_1^* - u_1 &= \int_0^{f/N} [B(\tau) - B(0)] d\tau; \\ u_{n+1}^* - u_{n+1} &= u_n^* - u_n + \int_{f^n/N}^{f^{(n+1)}/N} \left[B(\tau) - B\left(f \frac{n}{N}\right) \right] d\tau + \\ &+ \int_{f^n/N}^{f^{(n+1)}/N} [B(A u_n^*) - B(A u_n)] d\tau. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Оценивая отдельно каждое из слагаемых правой части, получим

$$\| \tilde{u}_{n+1} + u_{n+1} \| W_z^{2n} = \| \tilde{u}_n - u_n \| \cdot \left(1 + c_1 c_2 \cdot \frac{\| f \|_{L_2}}{N} \right) + \frac{c_1}{2} \cdot \frac{\| f \|_{L_2}^2}{N^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \| u - u_n \| W_z^{2n} &\leq \frac{c_1}{2} \cdot \frac{\| f \|_{L_2}^2}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 + c_1 c_2 \cdot \frac{\| f \|_{L_2}}{N} \right)^n \leq \\ &\leq \frac{1}{2c_2} \| f \|_{L_2} \cdot \frac{1}{N} e^{c_1 c_2 \| f \|_{L_2}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Из (3.35) следует, что рассматриваемый метод сходится, причем погрешность убывает пропорционально числу принятых шагов.

Метод последовательных нагружений с учетом нагрузочных невязок. При одинаковых шагах нагружения этот метод имеет следующую вычислительную схему:

$$\left. \begin{aligned} A_n \Delta u_{n+1} &= f \frac{n+1}{N} - A u_n; \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta u_{n+1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

где A_n — линейный оператор, аналогичный (3.22).

Геометрическая интерпретация метода для одномерного случая приведена на рис. 3.7. На $n+1$ шаге 1 ($l=1, 2, \dots, L$) уравнение метода конечных элементов будет

$$\begin{aligned} \sum_{r \in l_1} K_{l1,r}^{(n)} \Delta q_{1,n+1} + \dots + \sum_{r \in l_j} K_{lj,r}^{(n)} \Delta q_{j,n+1} + \dots + \sum_{r \in l_L} K_{lL,r}^{(n)} \Delta q_{L,n+1} = \\ = P_l \frac{n+1}{N} - \sum_{j=1}^L \sum_{r \in l_j} K_{lj,r} q_{j,n} = P_l \frac{n+1}{N} - \sum_{r \in l} F_{l,r}^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Исследуем сходимость рассматриваемой модификации. Для этого случая выражение (3.34) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n+1} - u_{n+1} &= \int_{A u_n}^{f(n+1)/N} [B(\tau) - B(A u_n)] d\tau = \int_0^1 (B[A u_n + \\ &+ t \left(f \frac{n+1}{N} - A u_n \right)] - B(A u_n) \left(f \frac{n+1}{N} - A u_n \right) dt. \end{aligned}$$

Откуда, используя условие Липшица, получим

$$\| u_{n+1}^* - u_{n+1} \| \leq \frac{c_1}{2} \left(\frac{\| f \|_{L_2}^2}{N^2} + 2c_2 \frac{\| f \|_{L_2}}{N} \cdot \| u_n^* - u_n \| + c_2^2 \| u_n^* - u_n \|^2 \right). \quad (3.38)$$

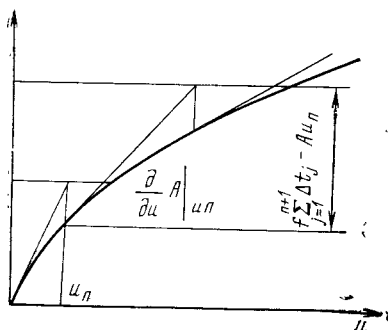


Рис. 3.7

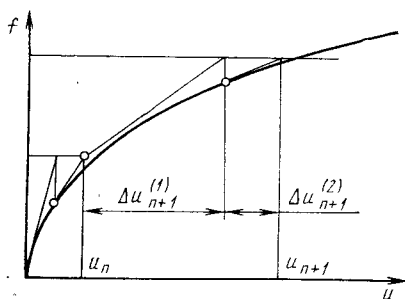


Рис. 3.8

По индукции устанавливаем, что неравенство $c_2 \|u_n^* - u_n\| \leq \frac{\|f\|}{N}$ при $N \geq 2c_1 c_2 \|f\|$ справедливо для всех n . Подставляя в (3.38) вместо $\|u_n^* - u_n\|$ большую величину $\frac{\|f\|}{c_2 N}$, получим

$$\|u - u_N\| \leq 2c_1 \frac{\|f\|^2}{N^2}. \quad (3.39)$$

Таким образом, из (3.39) следует, что рассматриваемая модификация сходится, причем погрешность убывает пропорционально квадрату N .

Метод последовательных нагружений с однократным уточнением на каждом шаге по методу Ньютона. При одинаковых шагах нагружения метод имеет следующую вычислительную схему:

$$A_n^{(1)} \Delta u_{n+1}^{(1)} = \frac{f}{N}; \quad A_n^{(2)} \Delta u_{n+1}^{(2)} = f \frac{n+1}{N} - A(u_n + \Delta u_{n+1}^{(1)});$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_{n+1}^{(1)} + \Delta u_{n+1}^{(2)}.$$

Геометрическая интерпретация метода для одномерного случая приведена на рис. 3.8. На $n+1$ шаге l ($l=1, 2, \dots, L$) уравнение метода конечных элементов для итерации (1.1) будет иметь вид, соответствующий (3.37), а для итерации (1.2) вид, соответствующий (3.23). Исследуем сходимость рассматриваемой модификации. Выражение (3.34) в данном случае имеет вид:

$$u_{n+1}^* - u_{n+1} = \int_{Au_{n+1}}^{f \frac{n+1}{N}} [B(\tau) - B(Au_{n+1}^{(1)})] d\tau,$$

$$u_{n+1}^* - u_{n+1}^{(1)} = \int_{Au_n}^{Au_{n+1} + f/N} [B(\tau) - B(Au_n)] d\tau.$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}^* - u_{n+1}\| &\leq \frac{c_1}{2} \|f \frac{n+1}{N} - Au_{n+1}^{(1)}\|^2 = \frac{c_1}{2} \|f \frac{n}{N} - Au_n + \\ &+ A\tilde{u}_{n+1}^{(1)} - Au_{n+1}^{(1)}\|^2 \leq \frac{c_1}{2} (\|Au_n^* - Au_n\|^2 + \|Au_{n+1}^* - Au_{n+1}^{(1)}\|^2). \end{aligned}$$

По индукции получаем, что при $N \geq c_1, c_2 \|f\|^2$ неравенство $\|u_n^* - u_n\| \leq \frac{c_1}{2} \cdot \frac{\|f\|^2}{N^2}$ справедливо для всех n . Тогда

$$\|u - u_N\| \leq \frac{c_1^3 c_2^2}{2} \cdot \frac{\|f\|^4}{N^4}. \quad (3.40)$$

Из (3.40) следует, что рассматриваемая модификация сходится, причем погрешность убывает пропорционально N^4 .

Полученные здесь оценки погрешности (3.35), (3.39), (3.40) основаны на достаточно общих свойствах оператора A и поэтому могут быть использованы не только для задач нелинейной теории упругости, но и для задач другого типа.

Рассмотренные модификации могут существовать и как самостоятельные методы, и как вспомогательное средство получения приближения для метода Ньютона — Канторовича. Так, в работе [38] предложен итерационный метод, который представляет собой метод последовательных нагружений с учетом нагрузочной невязки с автоматическим выбором значения шага, а затем переходит в сходящийся процесс Ньютона — Канторовича. Такая вычислительная схема очень привлекательна, хотя получение регулирующего параметра трудно в реализации¹. Приближения по итерациям, которые приводились выше при описании методов решения нелинейных уравнений, не могут служить объективными характеристиками, так как количество вычислений на одной итерации для различных методов различно. Так, если в методе упругих решений на каждой итерации необходимо только вычислить дополнительные нагрузки $(f - Au_{n+1})$, а для получения Δu использовать уже обращенную матрицу, соответствующую оператору A_0 , то в методе переменных параметров, наоборот, на каждой итерации необходимо составлять и решать систему линейных уравнений, оставляя правую часть без изменений. В методе Ньютона на каждой итерации надо делать и то и другое, т. е. составлять и решать систему линейных уравнений, а также изменять правые части.

Для более объективной оценки приведен график (рис. 3.9) изменения квадратичной невязки γ для рассмотренных методов в зависимости от числа вычислений t (использованы данные конкретных численных экспериментов). На нем даны кривые, со-

¹ Интересная модификация шаговых методов также с использованием принципа регулирования предложена в работе [70].

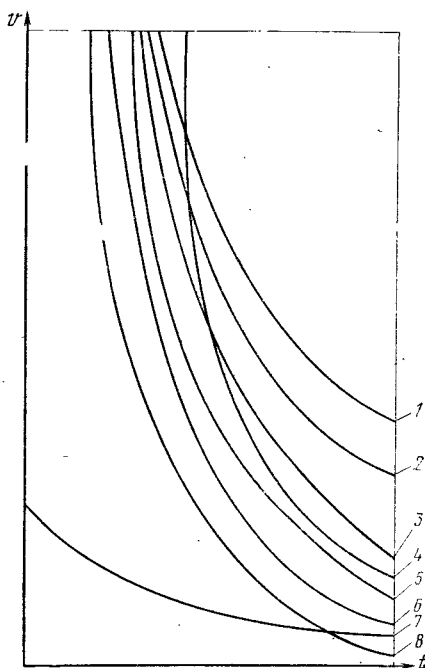


Рис. 3.9

ответствующие методам: упругих решений 6, переменных параметров 5, касательных модулей 8, одного параметра 7, последовательных жесткостей 1, последовательных нагружений 2, последовательных нагружений 3 (с учетом невязки), последовательных нагружений 4 с однократным уточнением по Ньютону. График отображает только общие тенденции, так как соотношение между процедурами (в смысле вычислений) составления и решения уравнений и вычисления нагрузочных невязок зависит от количества степеней свободы, сложности функций $\sigma_i(\epsilon_i)$, вида аппроксимирующих полиномов и т. п.

Рассмотренные методы, конечно, очень условно можно разделить на два класса: итерационные и прямые.

К первым можно отнести первые четыре метода. Их характерная черта — заранее неизвестно количество итераций, которые понадобятся, чтобы достичь заданную точность. Последние четыре (модификации шаговых) можно назвать прямыми, так как, заранее назначая количество шагов, неизвестно, какая будет достигнута точность.

График (см. рис. 3.9) говорит в пользу итерационных методов. Вместе с тем шаговые методы нашли большее применение для физически нелинейных задач. Это объясняется их четким физическим смыслом, что дает возможность смоделировать отдельные физические процессы. Так, на основе метода последовательных жесткостей можно смоделировать процесс изменения напряженно-деформированного состояния системы при изменении жесткостных характеристик, вызванных определенными факторами (например, ползучестью). На основе метода последовательных нагружений можно смоделировать процесс постепенного увеличения нагрузки, начиная от нулевой и приближаясь к нагрузке, предшествующей разрушению. В процессе такого моделирования можно проследить различные явления, например, для железобетона — развитие трещин, текучесть арматуры и т. п. (см. п. 3.4). Моделируя процесс нагружения на каждом этапе,

можно проследить изменение траекторий напряжений и деформаций и в результате расчета составить суждение о том, насколько моделируемый процесс близок к простому нагружению. Таким образом, анализируя процесс нагружения, можно использовать методы нелинейной теории упругости для решения задач теории малых упруго-пластических деформаций.

Определение области применения того или иного метода зависит от целого ряда причин. Линеаризация уравнений, по сути, включает две процедуры: процедура *A* — составление линеаризованной матрицы жесткости всей системы по результатам предыдущего этапа, процедура *B* — определение отпора нелинейной системы, который соответствует перемещениям, найденным на предыдущем этапе. Рассмотренные методы включают либо одну из этих двух процедур, либо обе. Поэтому использование того или иного метода будет обусловлено трудоемкостью алгоритмизации и быстродействием той или иной процедуры [это зависит от функции $\sigma_i(\varepsilon_i)$, вида конечных элементов, внешней нагрузки и т. п.].

При необходимости только решения нелинейной задачи, т. е. определения напряженно-деформированного состояния, соответствующего заданной нагрузке, предпочтение следует отдавать итерационным методам. При этом если затруднена процедура *A*, то нужно использовать метод упругих решений или метод одного параметра, если затруднена процедура *B* — метод переменных параметров, если же обе процедуры реализуются достаточно просто — метод касательных модулей.

При необходимости проведения математического моделирования процесса нагружения используются шаговые методы. Все они предусматривают обязательное применение процедуры *A*. Если реализация процедуры *B* затруднена, нужно использовать простую модификацию метода последовательных нагружений. Если же доступна реализация обеих процедур, следует использовать метод последовательных нагружений с уточнением нагрузочной невязки для моделирования процесса нагружения либо метод последовательных деформаций для моделирования изменения состояния конструкции во времени.

3.4. Расчет железобетонных конструкций с учетом нелинейных свойств материала

В процессе нагружения в железобетонных конструкциях наблюдается развитие нелинейных деформаций, сильно влияющих на характер распределения усилий в элементах конструкций. Сначала в растянутых зонах развиваются нелинейные деформации и образуются трещины, затем нелинейные деформации развиваются в растянутой арматуре, в сжатых зонах бетона, а перед разрушением и в сжатой арматуре. Кроме того, напряженное состояние железобетонных конструкций зависит не только от

размера нагрузки, но и от длительности ее действия, так как бетон обладает свойствами ползучести, что приводит к изменению напряженно-деформированного состояния во времени.

При расчете сложных железобетонных сооружений трудность учета этих факторов, обусловленных физико-механическими свойствами железобетона, усугубляется факторами, обусловленными конструктивными особенностями сооружения — сложная геометрия, наличие отверстий, нерегулярность структуры, сложные условия опирания, внешняя и внутренняя неопределенность. Причем в процессе нагружения наблюдается перераспределение усилий и напряжений не только между бетоном и арматурой, но и между отдельными элементами и частями сооружения.

К середине 60-х годов в области расчета железобетонных конструкций сложилась ситуация, когда усилия в элементах конструкций определялись в линейно-упругой стадии, а прочность отдельных элементов проверялась из условия нелинейной работы железобетона. Для устранения нелогичности такой ситуации вводились различные поправки. Например, учет перераспределения напряжения проводился за счет некоторого понижения экстермальных усилий или для некоторого класса задач методами предельного равновесия находилась разрушающая нагрузка, а допустимая эксплуатационная нагрузка определялась введением общего понижающего коэффициента. Такие приемы позволяли весьма приближенно учитывать действительную работу железобетона. Причем наиболее важная стадия работы железобетона — эксплуатационная (когда до предельного состояния еще далеко, а нелинейные деформации уже начали развиваться) выпадала из поля зрения. К сожалению, такая ситуация во многом продолжает сохраняться в настоящее время, хотя работы отечественных ученых в последнее десятилетие позволяют надеяться на ее изменение в лучшую сторону. Характерная особенность этих работ — стремление проследить поведение железобетонной конструкции на всем протяжении нагружения, начиная от небольших нагрузок, когда работа системы может считаться еще линейной, включая эксплуатационную стадию, когда влияние нелинейных деформаций уже существенно, и заканчивая стадией, предшествующей разрушению.

Исследование в этих случаях ведется в рамках простого активного нагружения, т. е. в случаях, где возможно использование приемов нелинейной теории упругости. Расположение трещин принимается достаточно частым, чтобы их можно было отнести к микромасштабу, т. е. пренебречь нарушением сплошности макромасштаба. Все это дает возможность методы, рассмотренные выше (п. 3.1—п. 3.3), использовать при расчете железобетонных конструкций на основе МКЭ.

Рассмотрим приемы построения матриц жесткости железобетонных конструкций для различных уравнений напряженного со-

стояния на основе варианта теории деформирования железобетона, предложенной В. С. Здоренко [29]. Этот подход характерен четким физическим смыслом, ориентирован на вариационную постановку задачи, прост в алгоритмизации и дает хорошие результаты при математическом моделировании процесса нагружения.

При расчете железобетонных балок-стенок для построения линеаризированной матрицы жесткости принимается следующее выражение потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} h \int_{\Omega} (A_{11}\epsilon_x^2 + A_{22}\epsilon_y^2 + A_{33}\gamma_{xy}^2 + 2A_{12}\epsilon_x\epsilon_y + 2A_{13}\epsilon_x\gamma_{xy} + 2A_{23}\epsilon_y\gamma_{xy}) d\Omega \quad (3.41)$$

До образования трещин по области КЭ его материал рассматривается ортотропным, плоскости упругой симметрии которого параллельные взаимно ортогональному направлению арматуры.

Связь между напряжениями и деформациями для ортотропного тела на каждом этапе расчета принимается в виде:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{2\nu}{(E_1 + E_2)} \sigma_y; \\ \epsilon_y &= -\frac{2\nu}{(E_1 + E_2)} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y; \quad \gamma_{xy} = \frac{E_1 + E_2}{4(1 + \nu)} \tau_{xy}; \\ E_1 &= \frac{E_{\delta x} h + E_{ax} f_{ax}}{h}; \quad E_2 = \frac{E_{\delta y} + E_{ay} f_{ay}}{h}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где f_{ax} , f_{ay} — площадь арматуры на единицу длины вдоль ортогонального направления арматуры; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина балки-стенки; $E_{\delta x}$, $E_{\delta y}$, E_{ax} , E_{ay} , ϵ_y — касательные модули деформаций в точке ϵ_x и ϵ_y .

Деформации ϵ_x и ϵ_y вычисляются по перемещениям на предыдущих этапах.

Выражения для A_{11} , A_{22} , A_{23} , A_{12} , A_{13} , A_{23} получаются из (3.42).

После образования трещин выражения для $A_{11} \div A_{33}$ можно получить на основании зависимостей, изложенных в работе [33]. Однако, используя свойство инвариантности потенциальной энергии к направлению осей, эти коэффициенты можно также получить, записав выражение потенциальной энергии КЭ в тех осях, относительно которых можно сформировать физические соотношения рассматриваемого материала [17, 18]. Так, например, предполагая, что направление главных напряжений и относительных деформаций совпадают и коэффициент Пуассона после

образования трещин равен нулю, можно выражение для Π_r записать:

$$\Pi_r = \frac{1}{2} h \int_{\Omega} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2) d\Omega, \quad (3.43)$$

где σ_1 , σ_2 , ε_1 , ε_2 — напряжения и относительные удлинения на главных площадках, связь между которыми на каждом этапе расчета выглядит так: $\sigma_1 = a_1 \varepsilon_1$; $\sigma_2 = a_2 \varepsilon_2$.

Значения коэффициентов a_1 , a_2 зависят от числа трещин в одной точке, угла наклона трещин, значения напряжений на главных площадках. Если для решения нелинейных уравнений применяется метод последовательных нагружений (для построения матрицы жесткости), то до появления трещин используется выражение (3.41), а после появления трещин выражение (3.43). Как уже указывалось, для решения нелинейной задачи правомерно использование координатных функций, доставляющих сходимость линейной задаче, т. е. для прямоугольного элемента балки-стенки могут быть использованы координатные функции (1.20), а для треугольного — (2.6). Практика расчетов показывает, что достаточно хорошие результаты получаются при интегральной оценке напряженного состояния r конечного элемента, т. е. когда физические зависимости, определенные в центральной точке, распространяются на всю область Ω_r . От этой предпосылки безусловно можно отказаться, применяя для выражения K_{ij} численное интегрирование, так как на основе введенных координатных функций всегда имеется возможность определить σ и ε в любой точке рассматриваемого КЭ.

Рассмотрим расчет трехпролетной железобетонной балки-стенки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, которая приложена к верхней грани¹.

Экспериментальное нагружение производилось ступенями по 4 тс/м. После приложения очередной порции нагрузке давалась выдержка 5—6 мин, затем снимались расчеты, фиксировались трещины и замерялась ширина их раскрытия. Нагружение продолжалось до разрушения конструкции. Испытания проводились на большой партии образцов-близнецов. Таким образом в процессе испытания были получены данные о последовательности появления трещин, развитии деформации, картине разрушения.

Балки-стенки рассчитывались методом последовательных нагружений по дискретной расчетной схеме с прямоугольной сеткой. Шаги нагружения были приняты неравномерными (2 тс/м, 1 тс/м, 0,5 тс/м) со сгущением в момент появления и стабилизации основных трещин.

¹ Подробные сведения о материале конструкции, методике эксперимента и его результатах приведены в работе [39].

После каждого шага нагружения¹ о каждом элементе выдавалась следующая информация: нагружения в бетоне и в арматуре; наличие одной или двух трещин и углы их наклона к основным осям, признак выкалывания бетона из плоскости конструкции. Для математической интерпретации этого состояния использованы рекомендации работы [5].

Основные этапы возникновения и развития трещин, полученные на ЭВМ, представлены в правой части рис. 3.10. Возникновение трещин в определенном КЭ под данным углом отмечалось тонкой линией. Выкалывание бетона отмечалось затемнением всего КЭ. В левой части рис. 3.10 приведены основные этапы развития и появления трещин, полученные экспериментально. Сравнение результатов показывает, что качественная картина изменения напряженно-деформированного состояния железобетонной балки-стенки, полученная путем математического моделирования процесса нагружения на ЭВМ, в основном правомерна.

При расчете железобетонных тонких плит для построения линеаризованной матрицы жесткости принимается следующее выражение потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A_{11} K_x^2 + A_{22} K_y^2 + 4A_{33} K_{xy}^2 + 2A_{12} K_x K_y + 4A_{13} K_x K_{xy} + 4A_{23} \times \\ \times K_y K_{xy}) d\Omega. \quad (3.44)$$

До образования трещин коэффициенты вычисляются по формулам:

$$A_{11} = A_{22} = D_1; \quad A_{12} = \nu D_1; \quad A_{13} = A_{23} = 0; \quad A_{33} = \frac{1}{2} (1 - \nu) D_1;$$

$$D_1 = \begin{cases} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, & \text{если } M \leq 0,5 M_{\delta T}; \\ 1 - \frac{M - 0,5 M_{\delta T} Eh^3}{2,5 M_{\delta T} 12(1-\nu^2)}, & \text{если } M > 0,5 M_{\delta T}, \end{cases}$$

где $M_{\delta T} = \frac{h^2}{3,5} R_p^n$ — момент трещинообразования; M — максимальный главный момент.

После образования трещин выражения для $A_{11} \div A_{33}$ можно принять в виде, предложенном в работе [33]. Однако, используя свойство инвариантности потенциальной энергии к направлению координатных осей, эти коэффициенты можно получить через главные компоненты напряженного состояния. Так, например, предполагая, что направление главных моментов и кривизны совпадают и коэффициент Пуассона после образования трещин

¹ Подробное описание математического эксперимента приведено в работе [17].

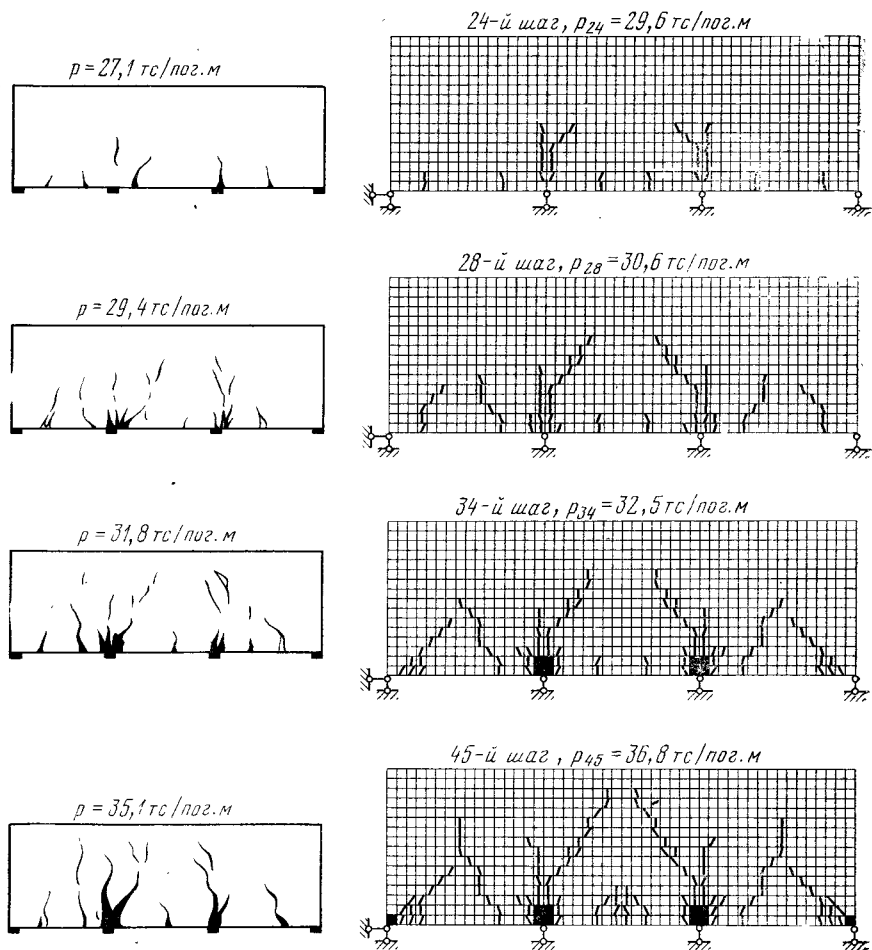


Рис. 3.10

равен 0, можно записать

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (M_1 K_1 + M_2 K_2) d\Omega, \quad (3.45)$$

где M_1 , M_2 , K_1 , K_2 — главные моменты и кривизны, которые на каждом этапе расчета линейно зависят, т. е.: $M_1 = a_1 K_1$; $M_2 = a_2 K_2$.

Коэффициенты a_1 , a_2 в соответствии с методом последовательных нагружений вычисляются по формуле

$$a_i^{(n)} = \frac{\partial}{\partial K} f(K_i^{(n)}).$$

Функция, характеризующая связь между главными моментами и кривизнами, может быть принята в виде графика (рис. 3.11). На графике точка 1 соответствует моменту появления пластических деформаций в растянутой зоне, точка 2 — моменту трещинообразования, 3 — моменту начала текучести растянутой арматуры одного направления, 4 — предельному моменту сечения.

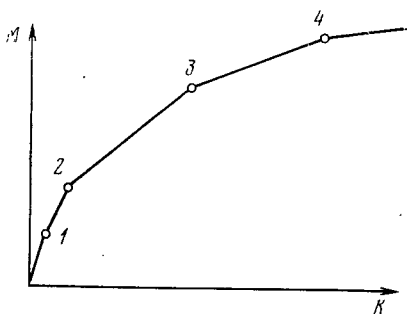


Рис. 3.11

Для построения матрицы жесткости конечного элемента железобетонной плиты могут быть использованы координатные функции (1.22), (1.25), (2.6), (2.8).

Рассмотрим пример расчета квадратной шарнирно опертой железобетонной плиты под равномерно распределенную нагрузку¹. При расчете использовались прямоугольные конечные элементы. Шаги нагружения были приняты неравномерными со сгущением в моменты появления и стабилизации трещин, а также появления линий излома. По данным эксперимента первые изломы в плите были обнаружены при нагрузке $0,48 \text{ кгс/см}^2$, а разрушение плиты произошло при нагрузке $0,62 \text{ кгс/см}^2$.

На рис. 3.12 приведен характер появления и развития линий изломов в плите с увеличением нагрузки на нижней поверхности плиты, полученный в результате математического моделирования ($p_{25}=0,45 \text{ тс/м}^2$ и $p_{30}=0,56 \text{ тс/м}^2$) и на основе эксперимента ($p=0,62 \text{ тс/м}^2$). Сравнивая эти данные, можно сделать вывод о хорошем согласовании моментов появления первых изломов, величины разрушающей нагрузки и общей картины трещин, что в определенной мере подтверждает правомерность использования рассмотренных методов.

Сочетание МКЭ с методом последовательных нагружений создает благоприятные предпосылки для организации математического моделирования процесса статического нагружения железобетонных конструкций. Подобно тому как статическое нагружение соответствует постепенному увеличению нагрузки с постепенным изменением жесткостных характеристик отдельных мест сооружения, так и при расчете методом последовательных нагружений нагрузка прикладывается не сразу, а постепенно, отдельными «порциями». При этом на каждом этапе расчета учитывается изменение жесткостных характеристик в каждом отдельном месте сооружения (для каждого конечного элемента). Такой расчет, как и действительное нагружение, начинается с ненагружен-

¹ Экспериментальные данные на этой плите приведены в работе [37], математический эксперимент — в работе [18].

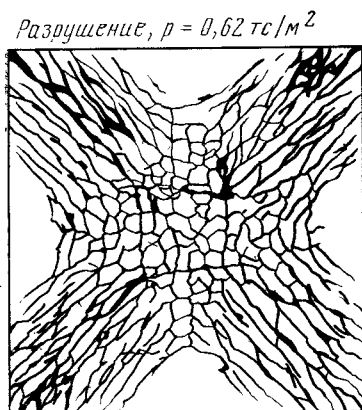
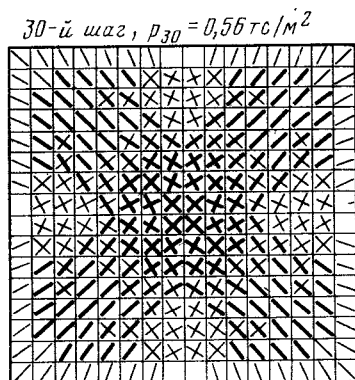
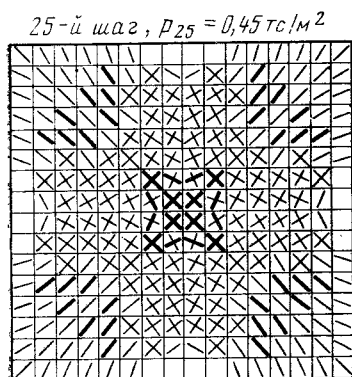


Рис. 3.12

ного состояния, когда нагрузка и перемещение равны нулю, и может закончиться для любой наперед заданной нагрузки. Это дает возможность проследить поведение рассчитываемой системы на всем протяжении нагружения, начиная от небольшой нагрузки, когда система еще работает в упругой стадии, включая состояние, когда появляются первые трещины в растянутых и развиваются нелинейные деформации бетона в сжатых зонах, и кончая стадией, предшествующей разрушению конструкции.

Таким образом, помимо основной задачи такого расчета — получение действительной картины напряженного состояния железобетонной конструкции при заданной нагрузке, — этот расчет дает возможность выявить размер нагрузки, когда трещины или деформации в каком-либо месте сооружения достигли недопустимого размера, т. е. производить расчет по второму и третьему предельным состояниям.

Если продолжить расчет, неограниченно увеличивая нагрузку, то это будет возможно до тех пор, пока стадия напряженно-де-

формированного состояния не окажется настолько близко к предельной, что математическая модель потеряет смысл. В этом случае диагональные члены общей матрицы жесткости на последнем этапе нагружения станут настолько малы, что не удастся, ввиду плохой обусловленности матрицы, найти соответствие между внешними и внутренними силами.

Приведенные примеры показывают, что нагрузка, полученная на последнем этапе нагружения, достаточно близка к предельной. Эти примеры выполнены для довольно простых систем, хотя метод конечных элементов дает возможность произвести математическое моделирование для значительно более сложных систем — плит произвольной формы и с произвольным опиранием, с отверстиями, а также комбинированных систем — рамносвязных и плит, подпертых ребрами или структурами.

Достаточно перспективна возможность сочетания метода последовательных нагружений с методом последовательных жесткостей. Здесь можно математически моделировать сложный процесс нагружения железобетонных конструкций во времени. Кратковременное приложение нагрузки моделируется методом последовательного нагружения; для моделирования изменения напряженного состояния при длительном действии нагрузки используется метод последовательных жесткостей, который в физическом смысле соответствует изменению состояния, обусловленного изменением жесткостей. При дальнейшем кратковременном изменении нагрузки опять используется метод последовательных нагружений и т. д.

ГЛАВА 4

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МКЭ

4.1. Основные вопросы алгоритмизации МКЭ и его реализации на современных ЭВМ

Дискретная расчетная схема обуславливает описание напряженно-деформированного состояния исследуемого объекта в виде системы алгебраических уравнений, порядок которой может быть весьма высоким. Это во многом объясняет ориентацию МКЭ на современную вычислительную технику.

Глубокая аналогия между МКЭ и классическими методами строительной механики стержневых систем может быть использована при разработке программ, реализующих этот метод. С одной стороны, имеются данные для обобщения опыта создания математического обеспечения для стержневых систем, которое в настоящее время располагает значительно большими возможностями (в смысле размеров и свойств рассчитываемых конструкций, удобства решения задач и т. д.), чем математическое обеспечение для исследования объектов теории упругости. С другой стороны,

облегчается обоснование позиции, позволяющей с единой точки зрения трактовать методы расчета как стержневых (одномерных), так и двумерных и трехмерных систем. В связи с этим появляется возможность в программе реализовать такую схему, которая была бы однотипной для расчета стержневых систем, балок-стенок, изгибаемых пластин, оболочек, массивных тел, а также комбинированных систем, состоящих из элементов различной мерности — пластин и оболочек, подкрепленных ребрами или структурами, рамно-связевых систем и т. п.

Основная процедура при численной реализации МКЭ, даже в случае нелинейной задачи, — процедура расчета линейно деформируемой системы. Здесь можно выделить следующие основные этапы решения задачи, которые обуславливают много проблем, требующих решения как при ее алгоритмизации, так и при ее реализации на ЭВМ:

назначение расчетных узлов, в которых определяются размеры разрешающей функции и расчленение исследуемой системы на КЭ;

построение матриц жесткости;

составление системы канонических уравнений;

решения системы уравнений и вычисление значений разрешающей функции в расчетных узлах;

определение компонентов напряженно-деформированного состояния исследуемой системы по найденным значениям разрешающей функции.

Традиционные методы расчета стержневых систем имеют такую же последовательность, и многие ее аспекты подробно исследованы при разработке математического обеспечения для стержневых систем. Однако приложение этой схемы к расчету двумерных и трехмерных объектов требует решения многих специальных вопросов. Одним из них является назначение расчетных узлов. Для стержневых систем эта процедура никаких затруднений не вызывает. За расчетные узлы, как правило, принимаются точки пересечения стержней, а за конечные элементы (КЭ) сами стержни или простейшие образования из них — крестообразные, рамнообразные и т. п. Для двумерных и трехмерных объектов эта процедура сходна с процедурой нанесения расчетной сетки в других численных методах. Положение часто осложняется высоким градиентом разрешающей функции, что вызывает необходимость сгущения расчетной сетки. По-видимому, автоматизация этого процесса будет весьма затруднительной, хотя за рубежом уже имеются примеры автоматического построения расчетной сетки для простейших случаев.

Если задать предполагаемые линии одинаковых значений разрешающей функции, то возможно алгоритмизировать нанесение расчетной сетки с равномерным сгущением от одной изолинии к другой, тем более, что в МКЭ сгущение сетки производится довольно естественным образом. В дальнейшем на основании авто-

математически выполненными предварительными расчетами ЭВМ можно будет поручить и само построение изолиний.

При построении матриц жесткости МЖ важным вопросом является не только алгоритмизация процесса, когда МЖ задана в формульном виде, но и в случае, если имеется самая общая информация о геометрии конечного элемента, аппроксимирующих полиномах и дифференциальном операторе задачи. Все сказанное относится и к алгоритмизации приведения местной нагрузки к узловой.

При построении канонических уравнений может быть целиком использован опыт реализации на ЭВМ расчета стержневых систем. Определенная специфика здесь может быть внесена сложным физическим смыслом некоторых степеней свободы МКЭ. Алгоритмизация решения систем линейных уравнений требует особой тщательности, так как успешная реализация этой процедуры в основном определяет качество вычислительного комплекса — его быстродействие, точность решения задачи.

При определении компонентов напряженно-деформированного состояния важным вопросом является возможность их определения в произвольных местах, в том числе и в узлах сетки (в методе перемещений нахождение усилий в узлах вызывает определенные трудности), а также удобный вывод результатов как в цифровом, так и в графическом виде.

4.2. Построение матриц жесткости

Алгоритмизация построения МЖ может быть проведена несколькими способами. Наиболее очевидно аналитическое получение жесткостных характеристик с последующим программированием формул. Однако при большом числе степеней свободы и сложности аппроксимирующих полиномов этот процесс может оказаться излишне трудоемким и занимать большой объем оперативной памяти ЭВМ.

Имеются алгоритмы [59], основанные на расчленении матрицы жесткости на несколько групп по видам перемещений. Так, например, для трехмерного параллелепипеда выделяется группа жесткостных характеристик R_{vv} (реактивных усилий, возникающих по направлению оси x от перемещений по направлению этой же оси), затем группа R_{vv} , R_{vw} и т. п. Для каждой группы вводится стандартная цифровая матрица, снабженная множителем, который зависит от физических и геометрических характеристик КЭ. Обилие цифровых матриц и группировка жесткостных характеристик не по узловым перемещениям, а по их видам (как правило, это оказывается неудобным при построении общего алгоритма расчета, так как сильно увеличивает ширину ленты уравнений) делает такие алгоритмы недостаточно приемлемыми. Приведем алгоритм [16], в котором формула вычисления жесткостной характеристики связана с ее адресом в МЖ — ij . Идея алгоритма

основана на ограниченном числе типов полиномов, аппроксимирующих перемещения по области КЭ. Для примера рассмотрим КЭ в виде параллелепипеда (см. рис. 2.11). Примем полилинейный закон перемещений по области КЭ. Тогда

$$V(x, y, z) = X_1 Y_1 Z_1 V_1 + X_2 Y_1 Z_1 V_2 + X_1 Y_2 Z_1 V_3 + X_2 Y_2 Z_1 V_4 + X_1 Y_1 Z_2 V_5 + \\ + X_2 Y_1 Z_2 V_6 + X_1 Y_2 Z_2 V_7 + X_2 Y_2 Z_2 V_8.$$

Аналогичные выражения будут для $U(x, y, z)$ и $W(x, y, z)$ с заменой $U_1 \div U_8$ на $U_1 \div U_8$ и $W_1 \div W_8$ соответственно.

Полиномы $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ имеют вид:

$$X_1 = \frac{x-a}{a}; \quad X_2 = \frac{x}{a}; \quad Y_1 = \frac{y-b}{b};$$

$$Y_2 = \frac{y}{b}; \quad Z_1 = \frac{z-c}{c}; \quad Z_2 = \frac{z}{c}.$$

Элементы МЖ будут зависеть от различных сочетаний обозначенных полиномов, а также параметров типа

$$x_0 = \frac{1}{a}; \quad y_0 = \frac{1}{b}, \quad z_0 = \frac{1}{c},$$

которые появляются при определении деформаций. Эта зависимость легко отражается в трех «векторах соответствия» (α, β, γ) , каждый из которых содержит 12 номеров.

Поэтому можно записать, что

$$K_{ij} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c f(x_{\alpha i} x_{\alpha j} y_{\beta i} y_{\beta j} z_{\gamma i} z_{\gamma j}) dx dy dz = f_1 \left(\int_0^a x_{\alpha i} x_{\alpha j} dx, \right. \\ \left. \int_0^b y_{\beta i} y_{\beta j} dy, \int_0^c z_{\gamma i} z_{\gamma j} dz \right).$$

Типы полиномов выбираются из «векторов соответствия» по i и j адресам. Значения интегралов в формуле для K_{ij} можно получить заранее как функции геометрических размеров КЭ. Значения интегралов приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Тип полинома	0	1	2
0	$\frac{1}{a}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$
1	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{6}$
2	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{3}$

Как правило, такой алгоритм оказывается достаточно компактным. Он широко использовался для вычислительных комплексов «МИРАЖ», «СУПЕР», «ЛИРА» [15, 19, 23].

Если аппроксимирующие функции принимаются в виде степенных полиномов, то можно формализовать и запрограммировать получение МЖ в ана-

литическом виде даже на ЭВМ, непосредственно не приспособленных для интегрирования и оперирования с аналитическими выражениями. Разработанная программа «МАКЕТ» для ЕС ЭВМ осуществляет автоматическое построение элементов МЖ в аналитическом виде по информации о геометрии и физико-механических характеристиках конечного элемента, координатных функциях и дифференциальном операторе задачи. По этой программе также могут быть получены формулы приведения местной нагрузки к узловой¹.

При разработке вычислительных комплексов программа использовалась для проверки ранее полученных и получения новых МЖ в аналитическом виде с последующим программированием их вышеприведенными приемами. По программе были получены в аналитическом виде МЖ для таких сложных КЭ как треугольный элемент плиты, прямоугольный и треугольный элемент оболочки и т. п.

4.3. Составление канонических уравнений МКЭ

Можно выделить два способа составления канонических уравнений, условно назвав их операторным и поэлементным.

Операторный способ тесно связан с реализацией на ЭВМ метода конечных разностей и вариационно-разностного метода. Суть его заключается в наличии набора типовых операторов (например, 13-членный оператор конечно-разностного аналога бигармонического дифференциального уравнения для изгибаемой пластины), с которыми связаны номера составляемых уравнений. Возможность быстрого составления уравнения с любым номером, что особенно важно при использовании различных итерационных методов, является большим преимуществом. Однако при различного рода нерегулярностях число нетиповых операторов быстро возрастает, что зачастую становится непреодолимым препятствием для применения операторного способа.

Поэлементный способ возник при разработке программ расчета стержневых систем. Его суть заключается в последовательном просмотре всего списка элементов, из которых состоит исследуемый объект. Для каждого рассматриваемого элемента строится МЖ в местной системе, затем переводится в общую систему координат и в соответствии с номерами узлов (а значит, и перемещений), относящихся к этому элементу, рассылается в общую систему канонических уравнений. Если по направлению какого-либо перемещения наложена связь, то соответствующие строки и столбец в общей системе уравнений просто опускаются. Такой способ совершенно безразличен к разнородности элементов, из которых набран исследуемый объект, что особенно важно при рас-

¹. Подробно возможности программы «МАКЕТ» описаны в работе [34].

чете комбинированных систем. При использовании этого метода целесообразно составлять всю систему уравнений сразу, а если она вся не помещается в оперативной памяти, то отдельными небольшими группами, последовательно запоминая их во внешней памяти компьютера. Причем весь список элементов приходится просматривать столько раз, сколько таких групп входит в общую систему уравнений. Конечно, это оказывается определенным недостатком поэлементного способа, который, однако, смягчается, с одной стороны тем, что наиболее распространенный метод решения уравнения (метод Гаусса) все равно, как правило, требует хранения всей системы. С другой стороны, современные компьютеры имеют быструю внешнюю память (магнитные барабаны, диски) и сводят к минимуму потери времени при обращении к ней.

Последовательность поэлементного способа составления матрицы коэффициентов K канонических уравнений в случае, когда в оперативную память ЭВМ одновременно помещается t уравнений, выглядит так:

1. Рассматривается j группа уравнений. Номер первого уравнения равен j_0 (т. е. это уравнение соответствует j_0 степени свободы), а номер последнего $j_0 + t$. Группы уравнений формируются последовательно, т. е. первой составляется группа уравнений, имеющая $j_0 = 1$, а последней составляется группа, для которой $j_0 + t = n$.

2. Из массива структурного описания элементов выделяются элемент, номера, узлов, относящихся к нему, и вектор номеров степеней свободы, относящихся к этим узлам. Если сформированный для r элемента вектор номеров степеней свободы не содержит номеров уравнений, входящих в j группу, то r элемент дальше не рассматривается и происходит переход к $r + 1$ элементу. В противном случае осуществляется дальнейшее рассмотрение r элемента.

3. По номерам узлов выделяются их координаты, по которым определяются геометрические размеры элемента и его ориентация относительно общей системы координат (строится матрица направляющих косинусов).

4. По типу жесткости, соответствующему r элементу, выделяются физические характеристики элемента и из библиотеки процедур достается процедура построения МЖ.

5. По имеющимся физическим и геометрическим характеристикам r элемента и выделенной процедуре строится МЖ в местной системе координат.

6. Перемножением полученной МЖ слева и справа на квазидиагональную матрицу направляющих косинусов она переводится в общую систему координат.

7. По вектору номеров степеней свободы определяются адреса элементов составленной МЖ в общей системе координат.

Нулевой номер означает, что соответствующая степень свободы отсутствует, т. е. наложена связь. При рассылке элементы строки и столбцы МЖ, соответствующие нулевому номеру, опускаются. После окончания рассылки происходит переход к $r+1$ элементу. После рассмотрения последнего элемента j группа уравнений сформирована. Она запоминается внешней памятью, и начинается формирование $j+1$ группы.

Вектор правых частей формируется следующим образом. Если нагрузка узловая, то ее величина просто накапливается в i элементе вектора P , где i — номер степени свободы, по направлению которой приложена рассматриваемая узловaя нагрузка. Если нагрузка местная, т. е. действует по области Ω_r конечного элемента по закону $f(\Omega_r)$, то она сначала приводится к узловой. Учитывая, что виды местных нагрузок в практических расчетах ограничены (равномерно распределенная нагрузка по всей области КЭ или его части и сосредоточенная сила — вот, пожалуй, все наиболее распространенные местные нагрузки), наиболее приемлема, по-видимому, формульная реализация, т. е. для каждого типа конечного элемента и вида местной нагрузки элементы вектора узловых усилий вычисляются по запрограммированным формулам. Этот способ аналогичен первому способу построения МЖ (см. п. 4.2).

Если в вычислительном комплексе реализован третий способ построения МЖ, когда выражение для Kl_j автоматически строится на ЭВМ в аналитическом виде и аппроксимирующие полиномы задаются в качестве исходной информации, то более логичной также будет прямая реализация процесса приведения местной нагрузки к узловой. В этом случае $f(\Omega_r)$ должна задаваться в исходной информации в виде полинома, а интегрирование выражения автоматически будет выполняться на ЭВМ. Такой способ удобен в том смысле, что местная нагрузка может быть задана произвольным полиномом, однако алгоритмизация задачи значительно усложняется, а время счета возрастает.

4.4. Решение систем уравнений высоких порядков

Успешная реализация МКЭ всегда будет связана с достижениями в проблеме решения систем уравнений высокого порядка. Сейчас при решении практических задач механики, как правило, используется метод Гаусса, несмотря на то, что он имеет ряд серьезных недостатков. Если потерю точности в некоторых результатах, вызванную несоответствием порядка и обусловленности системы уравнений с количеством значащих цифр, удерживаемых в ЭЦВМ, еще можно иногда компенсировать последующим уточнением или решением с удвоенной точностью, то недостаток, связанный с необходимостью решения всей системы, даже тогда, когда нужна весьма ограниченная информация о напряженно-деформированном состоянии локальной области исследу-

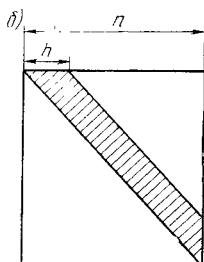
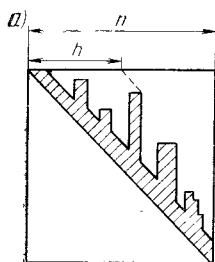


Рис. 4.1

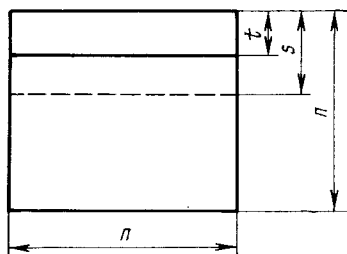


Рис. 4.2

евого объекта, уже трудно отнести в разряд поправимых. Тем не менее ряд модификаций, появившихся в последнее время, делает этот метод пока наиболее приемлемым. Так, очень плодотворно предложение использовать симметричную и ленточную структуру уравнений, обусловленную применением вариационных принципов и локально определенных координационных функций, что как раз характерно для МКЭ.

Много работ посвящено уменьшению ширины ленты, хотя при нумерации узлов более объективным критерием является минимизация вычислений, а не ширина ленты. В этом смысле иногда нумерация, приводящая к системе уравнений в виде «небоскреба» (рис. 4.1, а), может оказаться более оптимальной, чем с минимальной шириной ленты (рис. 4.1, б).

Много модификаций связано с использованием блочной схемы Гаусса. Часть усовершенствований ориентирована непосредственно на тот или иной тип ЭЦВМ. К ним относится прием обхода нулей: если в j исключаемом уравнении некоторые коэффициенты равны нулю, то исключение j неизвестного из уравнений с номером, соответствующим нулевым коэффициентам, не происходит. Так как ленточная матрица канонических уравнений, как правило, содержит много нулевых членов внутри ленты, то даже несмотря на то, что в процессе прямого хода по Гауссу часть из них заполняется, этот прием оказывается достаточно эффективным и в среднем сокращает время решения системы уравнений на 10—15%.

Другой прием [13] заключается в минимизации количества обращений к внешней памяти. Это вызвано тем, что время обращения к внешней памяти даже для магнитных барабанов и дисков на один-два порядка больше средней продолжительности арифметической операции процессора. Время же обращения к магнитным лентам вообще несоизмеримо с быстродействием процессора. Кроме того, большая часть сбойных ситуаций, как правило, возникает именно при обращении к внешним устройствам. Таким образом, минимизация количества обращений к внешней памяти не только сокращает время решения систем линейных уравнений,

но и улучшает режим работы ЭВМ. Кратко опишем этот алгоритм. На рис. 4.2 схематично представлена полностью заполненная матрица коэффициентов системы линейных уравнений порядка n . Исследуем процесс превращения этой матрицы в треугольную с точки зрения количества обращений к внешней памяти. Допустим, что в оперативную память ЭВМ помещается только s уравнений. Если исключение уравнений будет производиться по одному, то для исключения первого уравнения из оставшихся $n-1$ уравнений понадобится $m_1 = \frac{n-s+0}{s-1} + 1$ обращений, для исключения второго уравнения потребуется $m_2 = \frac{n-s-1}{s-1} + 1$ обращений, а для исключения i уравнения ($i < n$) понадобится $m_i = \frac{n-s-i+1}{s-1} + 1$ обращений к внешней памяти.

Общее количество обращений в этом случае

$$m = \sum_{i=1}^{n-s+1} m_i.$$

Если исключение будет производиться по t ($t < s$) уравнений, то для исключения первой группы t уравнений понадобится $m_1 = \frac{n-s}{s-t} + 1$ обращений, для исключения второй группы t уравнений потребуется $m_2 = \frac{n-s-t}{s-t} + 1$ обращений, а для исключения i группы t уравнений понадобится $m_i = \frac{n-s-t(i-1)}{s-t} + 1$ обращений к внешней памяти.

Общее количество обращений

$$m(t) = \sum_{i=1}^r m_i = \sum_{i=1}^r \left(\frac{n-s-t(i-1)}{s-t} + 1 \right),$$

где $r = \frac{n-s}{t} + 1$ — количество групп исключаемых уравнений.

Исследуем выражение для $m(t)$ с целью нахождения того значения t (количества исключаемых уравнений), которое соответствует минимальному значению функции $m(t)$. Для этого приближенно заменим сумму определенным интегралом:

$$m(t) = \int_1^r \left(\frac{n-s-t(i-1)}{s-t} + 1 \right) di = \frac{n^2 - s^2 + 2st + 2nt}{2(s-t)t}.$$

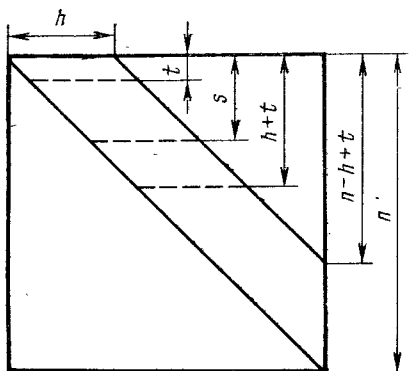


Рис. 4.3

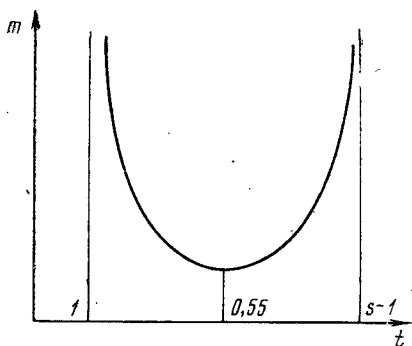


Рис. 4.4

Исследуя функцию $m(t)$ на минимум, найдем, что он соответствует

$$t = \frac{s}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{n}\right)^2}.$$

Аналогичные результаты можно получить для системы линейных уравнений с ленточной симметричной структурой (рис. 4.3). Для таких систем

$$m(t) = \begin{cases} \frac{n-s}{t} + 1 & \text{при } s > h+t; \\ \left(\frac{h+t-s}{s-t} + 1 \right) \frac{n-s}{t} + 1 & \text{при } s \leq h+t. \end{cases}$$

Пренебрегая укорочением уравнений с номером, большим $n-h+1$, найдем, что минимум $m(t)$ соответствует $t=0,5s$, а сама функция $m(t)$ имеет форму, показанную на рис. 4.4. К такой форме (при уменьшении отношения s/h) стремится и функция $m(t)$ для полностью заполненной матрицы.

При реализации метода Гаусса на ЭВМ надо иметь в виду, что арифметические операции в процессоре производятся с фиксированным количеством знаков. Так, для ЭВМ «Минск-22» и «Минск-32» операции производятся с точностью до 9 десятичных знаков, для ЭВМ М-220 — до 11 знаков, для ЕС ЭВМ с одинарной точностью — до 7 знаков, а с двойной — до 16. Это приводит к ошибкам округления, которые возникают из-за усечения или округления исходных данных или из-за накопления погрешности в ходе самого решения. Для метода Гаусса число операций умножения примерно равно $\frac{nh^2}{3}$, и исследования показывают, что для получения решения системы с точностью до t десятичных знаков

элементы канонической системы уравнения надо задавать с точностью до $t+r$ десятичных знаков, где $r = \lg \sqrt{n}$.

Опыт показывает, что одинарной точности для ЕС ЭВМ не хватает даже при решении средних по размеру задач неизвестных около 300), и здесь необходимо предусматривать возможность решения задачи либо с двойной точностью, либо последующего уточнения на основе какого-либо итерационного процесса.

4.5. Определение компонентов напряженно-деформированного состояния КЭ

В результате решения системы разрешающих уравнений МКЭ в перемещениях находят значения перемещений в узлах расчетной сетки. Выбирая перемещения узлов, относящихся к r конечному элементу q_r , и, перемножая их на матрицу направляющих косинусов r конечного элемента, получим вектор значений степеней свободы r конечного элемента в собственной системе координат — q_{rc} . Зная q_r , K_r и φ_r , легко построить все компоненты напряженно-деформированного состояния r конечного элемента:

1) перемещения, деформации

$$u_r = \varphi_r q_r, \quad \varepsilon_r = B u_r;$$

2) напряжения

$$\sigma_r = D \varepsilon_r;$$

3) узловые усилия

$$P_r = K_r q_r, \quad c.$$

Так как каждый элемент вектора u_r есть функция от координат x, y, z для точек области r конечного элемента, то и элементы вектора ε_r и σ_r , т. е. виды деформаций и напряжений $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \tau_{xy}, \sigma_x$ и т. д., также будут функциями координат x, y, z . Подставив конкретное значение x, y, z для рассматриваемой точки, получим величины всех компонентов напряженно-деформированного состояния в этой точке. Это не должно создавать иллюзии, что решение задачи по МКЭ получается в аналитическом виде: основным результатом решения задачи являются дискретные значения узловых перемещений q . Значения же перемещений, деформаций и напряжений в произвольной точке Ω_r в данном случае нужно рассматривать как своеобразные интерполяционные выражения. Причем закон интерполяции обусловлен системой аппроксимирующих функций φ_r , т. е. принят на самых ранних этапах расчета. Следует отметить, что метод перемещений обуславливает разрывы напряжений и деформаций на границах конечных элементов.

В практических расчетах можно пользоваться средними значениями этих компонентов, хотя безусловно необходимы теоретические исследования, позволяющие решить этот вопрос в большей степени логично.

4.6. Реализация различных граничных условий

Для метода конечных элементов в перемещениях нулевые перемещения, отражающие имеющиеся связи по направлению выбранной системы координат, задаются достаточно просто: номера степеней свободы, соответствующие наложенной связи, объявляются нулевыми и при составлении матрицы канонических уравнений элементы матриц жесткости конечных элементов, соответствующие нулевым номерам степеней свободы, опускаются. Таким образом, столбцы и строки общей матрицы жесткости K , соответствующие наложенным связям, отсутствуют. При расчете на заданное перемещение a по направлению i -й степени свободы обычно поступают следующим образом: i столбец общей матрицы K перемножают на величину a , полученные значения переносят в правую часть; i столбец и i строку матрицы K исключают из рассмотрения, т. е. либо вычеркивают, либо обнуляют (кроме диагонального члена).

Такое задание граничных условий (наложение связей можно рассматривать как расчет на заданные нулевые перемещения) имеет ряд существенных недостатков: расчет на заданные перемещения труден с алгоритмической точки зрения; практически невозможно наложить связи (и рассчитать на заданные перемещения) по направлениям, не совпадающим с направлениями осей выбранной системы координат; усилия в наложенных связях не вытекают из прямого расчета и их можно получить из рассмотрения условий равновесия соответствующего узла, что не очень удобно алгоритмически.

Для преодоления этих неудобств в практических расчетах часто используют прием, заключающийся в введении элемента конечной (но достаточно большой) жесткости по направлению вводимой связи или задаваемого перемещения Δ_i (рис. 4.5, а). В

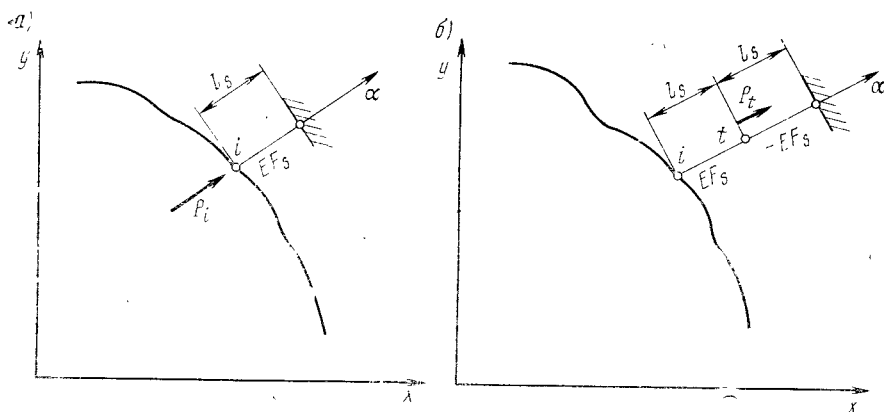


Рис. 4.5

этом случае расчет на заданное перемещение реализуется приложением по направлению α силы $P_i = \frac{\Delta_i EF_s}{l_s}$ (где Δ_i — заданное перемещение), а усилие, полученное в s элементе, является реакцией в наложенной связи. Если же связь действительно имеет конечную жесткость, этот прием вполне корректен, в противном же случае он имеет существенный недостаток: для точной реализации нужного условия необходимо, чтобы жесткость введенного элемента была бесконечной. Введение же элемента конечной жесткости, с одной стороны, вносит погрешность в моделирование связи, с другой стороны, большая жесткость, вызванная стремлением повысить точность моделирования, может резко ухудшить обусловленность общей системы уравнений. Поэтому очень действенным является прием, предложенный в работе [48], заключающийся во введении в i узле по направлению α так называемого нуль-элемента, т. е. двойного элемента с равными, но обратными по знаку жесткостями (рис. 4.5, б). Податливость такого элемента равна нулю и не зависит от величины EF_s . Расчет же на заданное перемещение Δ_i эквивалентен расчету на силу $P_i = -\frac{\Delta_i EF_s}{l_s}$, по направлению совпадающую с Δ_i и приложенную в среднем узле элемента t .

Рассмотренные приемы продемонстрированы на примере для линейного перемещения, однако по аналогии могут быть использованы и для угловых перемещений.

В работе [48] рассмотрено также много других чрезвычайно полезных для практических расчетов приемов, основанных на использовании нуль-элементов. Так, показано, что при помощи этих элементов можно реализовать заданное соотношение перемещений для группы узлов, например объединить (простейший случай) перемещения двух узлов по произвольному направлению, получив при этом усилие в связи, которая объединяет узлы. Важным вопросом является реализация присоединения конечного элемента к узлу системы, которое может иметь разную жесткость. Термин строительной механики стержневых систем «шарнир» можно трактовать как присоединение с нулевой жесткостью по направлению углового перемещения. В практике расчетов часто приходится иметь дело с различными видами присоединений как по направлению (например, проскальзывание), так и по величине жесткости (например, податливость сварных или замоноличенных узлов). Введение присоединений различных типов можно реализовать при помощи специальных элементов (рис. 4.6), имеющих заданную податливость по соответствующему направлению и бесконечную жесткость по остальным направлениям. Если эти направления совпадают с осями координат, то такую операцию можно выполнить объединением номеров степеней свободы для узлов i и j . В противном же случае необходимо вводить конечные (но достаточно большие) жесткости для специаль-

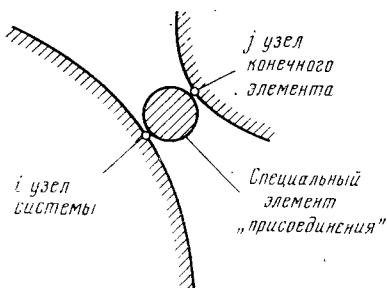


Рис. 4.6

ного элемента и иметь дело с такими же неприятностями, как и для связей с конечной жесткостью.

Эти недостатки можно избежать, если матрицу жесткости r конечного элемента обработать специальным образом: для $q_{r,1}$ степени свободы, по направлению которой присоединение имеет определенную податливость, на матрице K_r и векторах узловых усилий (к которым приведена местная

нагрузка) производится Жорданово исключение с предварительной засылкой в элемент K_{ii} значения податливости присоединения. Если происходит только снятие связи (нулевая жесткость присоединения), то в элемент K_{ii} ничего не засылается.

В строительной механике стержневых систем матрица жесткости при введении шарниров строится из других соображений, хотя и в этом случае может быть использован рассмотренный выше общий прием.

4.7. Применение суперэлементов для расчета спожных систем

Если рассчитываемая система слишком громоздка, то иногда оказывается удобным организовать так называемый рекурсивный расчет с расчленением всей системы на подсистемы — суперэлементы. Этот прием может оказаться удачным, когда расчленение на подсистемы происходит естественно: например, здание из объемных блоков (объемный блок — суперэлемент) или диафрагма высотного здания, собирающаяся из отдельных панелей (панель — суперэлемент). Фрагмент диафрагмы высотного здания показан на рис. 4.7. Диафрагма состоит из отдельных панелей, соединяющихся между собой в угловых точках.

Расчет такой системы можно выполнить обычным способом: нанести необходимую сетку (см. рис. 4.7) и рассчитать всю систему целиком. Однако большое количество расчетных узлов, элементов, неизвестных перемещений может сильно затруднить решение задачи. Используя суперэлементы, можно провести расчет поэтапно, существенно снизив на каждом этапе размерность задачи. Сначала построить матрицу жесткости для всех типов суперэлементов [в данном случае имеются два типа (рис. 4.8)], затем рассчитать систему, состоящую из суперэлементов (в данном случае система будет состоять из 6 суперэлементов с 12 суперузлами). В результате этого расчета будут определены перемещения суперузлов. На заключительном этапе рассчитать каждый из шести суперэлементов на заданные перемещения суперузлов.

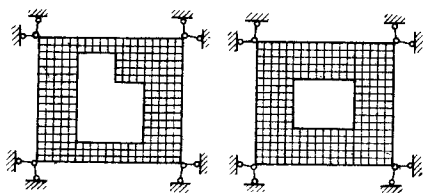
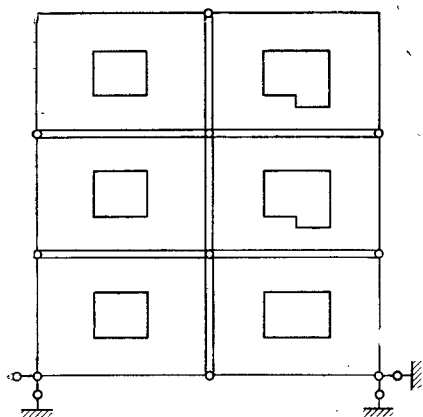


Рис. 4.7

Рис. 4.8

Последовательность расчета системы, набранной из суперэлементов, аналогична приведенной ранее (см. п. 4.1) с той лишь разницей, что матрица жесткости и узловые нагрузки определяются в результате расчета. Так как суперэлемент представляет сам по себе достаточно сложную систему, то матрицы аппроксимирующих функций φ_c строятся при помощи численного расчета суперэлемента на единичные смещения суперузлов, в результате которого строится матрица влияния, связывающая перемещения внутренних узлов суперэлемента с единичными смещениями суперузлов. Такая процедура обработки суперэлементов позволяет представить метод суперэлементной рекурсии как расчет по методу конечных элементов с построением аппроксимирующих функций при помощи матриц влияния.

Другая процедура обработки суперэлементов [13], основана на том, что в физическом смысле исключения j неизвестного по Гауссу соответствует освобождению от j связи. Это приводит к такой схеме построения матрицы жесткости и сведение местной нагрузки к узловой: для i суперэлемента вначале нумеруются все внутренние узлы (соответствующее им число степеней свободы обозначим n_i), а затем суперузлы (количество степеней свободы, соответствующее суперузлам, обозначим h_{i0}); составляются канонические уравнения для всех $n_i + n_{i0}$ степеней свободы (рис. 4.9); исключаются n_i неизвестные; оставшиеся части матрицы и столбцов свободных членов (на рис. 4.9 они заштрихованы) образуют искомые матрицы жесткости и столбцы узловых нагрузок.

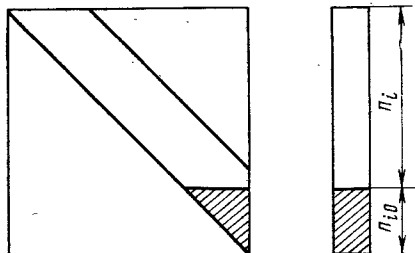


Рис. 4.9

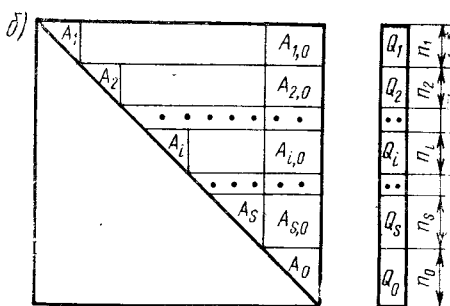
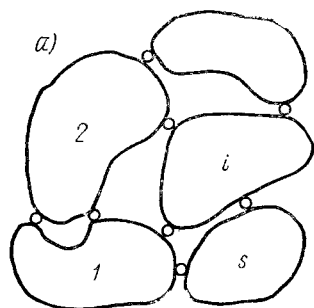


Рис. 4.10

С точки зрения этой процедуры метод суперэлементной рекурсии можно трактовать как своеобразный блочный метод Гаусса.

Действительно, пусть исследуемый объект расчленен на s суперэлементов, которые объединяются в общую систему при помощи суперузлов (рис. 4.10, а). Если узлы пронумеровать в таком порядке: сначала пронумеровать все h_1 внутренних узлов суперэлемента 1, затем h_2 внутренних суперэлемента 2 и т. д., а затем пронумеровать суперузлы, то система уравнений примет вид, показанный на рис. 4.10, б. Решение задачи в такой постановке можно провести двояко. Либо полностью составить систему уравнений, а затем решить ее, либо составлять и решать ее по частям. Сначала составить уравнение для суперэлемента 1, т. е. $A_1, A_{1,0}, Q_1$ и частично A_0, Q_0 и сделать исключение h_1 неизвестных. Затем проделать то же самое для остальных суперэлементов, после чего, сложив отдельные части A_0 и Q_0 , решать полученные уравнения, определив перемещения суперузлов, и сделать обратный ход для всей системы. Если суперэлементы различны, то оба способа идентичны как в отношении числа вычислений, так и в отношении точности счета. Если же имеются одинаковые суперэлементы, то число вычислений можно существенно сократить, так как, проделав вычисления для одного типа, результаты просто используются для суперэлементов этого же типа даже в том случае, если они по-разному ориентированы относительно общей системы координат, т. е. эта процедура типична для блочного Гаусса. Суперэлементы, в свою очередь, можно расчленить на подсистемы (суперэлементы 2-го ранга), развивая этот процесс и организовав своеобразную многогранговую рекурсию.

4.8. Алгоритмизация расчета нелинейных систем

Алгоритмизация задачи для нелинейного случая по сути сводится к двум процедурам:

1. Получение компонентов матрицы жесткости r элемента $K_{ls,r}^{(n)}$ для линейно упругого тела с переменным по области КЭ

модулем G_n , который определяется на основе заданной зависимости $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ и напряженно-деформированного состояния системы на n приближении. Коэффициенты $K_{ls,r}^{(n)}$ фигурируют в выражениях: (3.21) — для метода переменных параметров; (3.23) — для метода Ньютона; (3.31) — для метода последовательных жесткостей; (3.33) — для метода последовательных нагружений.

2. Получение отпоров в узлах r конечного элемента по направлению l степени свободы $F_{rl,n}$, соответствующих деформированному состоянию r конечного элемента на n этапе. Эти величины фигурируют в выражениях: (3.17) — для метода упругих решений; (3.23) — для метода Ньютона; (3.31) — для метода последовательных жесткостей; (3.37) — для метода последовательных нагружений с учетом невязки на каждом шаге.

Из выражения (3.13) вытекает следующая формула для получения $K_{ls,r}^{(n)}$ в случае, когда G_n является касательным модулем, т. е. $G_n = \left. \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_i} \right|_{u_n}$:

$$K_{ls,r}^{(n)} = \int_{\Omega_r} \left\{ \frac{\sigma_{in}}{\epsilon_{in}} \epsilon^T(\varphi_l) M \epsilon(\varphi_s) + \frac{1}{\epsilon_{in}^2} \cdot \left(\left. \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_i} \right|_{u_n} - \frac{\sigma_{in}}{\epsilon_{in}} \right) \epsilon(u_n) M \epsilon(\varphi_l) \epsilon^T(u_n) M \epsilon(\varphi_s) \right\} d\Omega_r. \quad (4.1)$$

Касательный модуль G_n используется для метода Ньютона и всех шаговых методов. Для метода переменных параметров G_n является текущим модулем и на основе (3.13) формула для $K_{ls,r}^{(n)}$ принимает вид:

$$K_{ls,r}^{(n)} = \int_{\Omega_r} \frac{\sigma_{in}}{\epsilon_{in}} \epsilon^T(\varphi_l) M \epsilon(\varphi_s) d\Omega_r. \quad (4.2)$$

Для одномерного случая формула (4.1) упрощается:

$$K_{ls,r}^{(n)} = \int_{\Omega_r} \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_i} (u_n) \epsilon^T(\varphi_l) \epsilon(\varphi_s) d\Omega_r. \quad (4.3)$$

Этой формулой широко пользуются при расчете физически нелинейных стержневых систем, хотя, по-видимому, ею можно пользоваться и для сложного напряженного состояния.

Сложность подынтегральной функции, обусловленная наличием радикала в выражении для ϵ_i , а иногда и формой аппроксимирующих функций φ_l и φ_s , приводит к необходимости численного интегрирования выражений (4.1), (4.2), (4.3). В этом случае последовательность вычисления $K_{ls,r}^{(n)}$ будет такова:

1. По известным значениям степеней свободы на n этапе, относящимся к r конечному элементу $q_r^{(n)}$ и известной матрице ап-

проксимирующих функций $\{\varphi\}_r$, строится функция перемещений $u_n(\Omega_r)$, соответствующих деформированному состоянию системы на n этапе:

$$u_n(\Omega_r) = \{\varphi\}_r q_r^{(n)}.$$

2. Область Ω_r расчленяется на m_r подобластей

$$\Delta\Omega_j \left(\Omega_r = \sum_{j=1}^{m_r} \Delta\Omega_j \right), \quad \text{размер которых обеспечивает необходимую}$$

точность расчета при принятии постоянных значений $\varepsilon(u_n)$, $\varepsilon_i \times (u_n)$, $\varepsilon(\varphi_l)$, $\varepsilon(\varphi_s)$ для каждой подобласти Ω_j .

3. Для каждой j подобласти по перемещениям u_n определяют значения деформаций $\varepsilon_{j,n}$, интенсивности деформаций $\varepsilon_{i,j,n}$ и $\sigma_{i,j,n}$ и деформации, соответствующие единичным значениям l и s степеней свободы ε_{lj} и ε_{sj} .

4. По формулам численного интегрирования, реализующим выражения (4.1), (4.2), определяется:

$$K_{ls,r}^{(n)} = \sum_{j=1}^{m_r} \left\{ \frac{\sigma_{i,j,n}}{\varepsilon_{i,j,n}} \varepsilon_{lj}^T M \varepsilon_{sj} + \frac{1}{\varepsilon_{i,j,n}^2} \left(\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \right) \bigg|_{u_n} - \right. \\ \left. - \frac{\sigma_{i,j,n}}{\varepsilon_{i,j,n}} \right\} \varepsilon_{jn} M \varepsilon_{lj} \varepsilon_{jn}^T M \varepsilon_{sj} \Delta\Omega_j; \\ K_{l,s,r}^{(n)} = \sum_{j=1}^{m_r} \frac{\sigma_{i,j,n}}{\varepsilon_{i,j,n}} \varepsilon_{lj}^T M \varepsilon_{sj} \Delta\Omega_j.$$

Формула для получения $F_{rl,n}$ вытекает из принципа возможных перемещений и имеет вид:

$$F_{r,l,n} = \int_{\Omega_r} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \bigg|_{u_n} \varepsilon^T(u_n) M \varepsilon(\varphi_l) d\Omega_r. \quad (4.4)$$

Численное интегрирование формулы (4.4) реализуется при помощи выражения

$$F_{r,l,n} = \sum_{j=1}^{m_r} \frac{\sigma_{i,j,n}}{\varepsilon_{i,j,n}} \varepsilon_{ln}^T M \varepsilon_{lj} \Delta\Omega_j.$$

Аппроксимирующие функции, обеспечивающие сходимость МКЭ для линейной задачи, обеспечивают сходимость решения и нелинейной задачи (см. п. 3.1). Это значит, что система $\{\varphi\}_r$ инвариантна к этапам расчета. С другой стороны, с чисто физической точки зрения линеаризация уравнений соответствует на каждом этапе расчету линейной системы с измененными физико-механическими свойствами материала. В связи с этим применение изменяющихся аппроксимирующих функций на каждом этапе могло бы, по-видимому, увеличить точность МКЭ. Для стержневых систем на каждом этапе имеется возможность производить

точное интегрирование дифференциальных уравнений, т. е. с точки зрения МКЭ на каждом этапе принимать измененные аппроксимирующие функции, обуславливающие точное решение дифференциальных уравнений. Точность решения нелинейной задачи при этом, конечно, улучшается. Такой подход рассмотрен в работе [11].

4.9. Реализация на электронных вычислительных машинах

Одно из важных и перспективных направлений дальнейших исследований в области МКЭ — его реализация на ЭВМ. Для этого есть много предпосылок: хорошая приспособляемость процедуры МКЭ для алгоритмизации; быстрое развитие вычислительной техники; большое количество инженеров и ученых, работающих в области МКЭ; острая необходимость в удобных «промышленных» вычислительных комплексах. Имеется опыт использования МКЭ в практической инженерной деятельности, и можно говорить о намечающихся тенденциях в этом направлении. До появления программ, реализующих МКЭ, были доступны средства, автоматизирующие расчеты стержневых систем. Поэтому, исследуя сложный объект теории упругости, либо прибегали к стержневым аппроксимациям, либо, применяя численные методы теории упругости, основные усилия тратили на сокращение количества вычислений. Для этого использовались различные упрощенные вспомогательные расчеты, экспериментальные данные об аналогичных сооружениях, определенная интуиция и т. п. Как вспомогательный материал к таким расчетам использовались соответствующие таблицы, номограммы и т. п., полученные методом конечных разностей или в рядах для плит, балок-стенок, оболочек, имеющих простую конфигурацию, граничные условия и нагрузку. Такая ситуация, с одной стороны, делала подобные исследования делом небольших групп высококвалифицированных специалистов, с другой стороны, приводила к тому, что различные конструктивные особенности, оказывающие значительное влияние на напряженно-деформированное состояние конструкции, ускользали от его внимания.

В настоящее время без особого труда осваиваются вычислительные комплексы, реализующие МКЭ. Этому способствует аналогичность вычислительной процедуры МКЭ и вычислительных схем расчета стержневых систем. Выполнение численных исследований увеличивает вероятность учета в расчетных схемах различных существенных конструктивных особенностей. Конечно, сокращение количества вычислений по-прежнему продолжает играть важную роль, так как возможности МКЭ и ЭВМ ограничены, однако этому уже не уделяется основное внимание. Центр тяжести переносится на построение расчетных схем, максимальное приближение математической модели к действительной работе сооружения.

В настоящее время имеются примеры разработок больших вычислительных комплексов, реализующих МКЭ на различных ЭВМ. К наиболее известным из них относятся:

«МКЭ» — Таллинского политехнического института для ЭВМ «Минск-22»;

«МИРАЖ» — Киевского института «Гипрохиммаш» для ЭВМ «Минск-22»;

«СУПЕР-76» — Киевского НИИ автоматизированных систем строительства (НИИАСС) для ЭВМ «Минск-32»;

«Прочность» — Киевского инженерно-строительного института для ЭВМ «БЭСМ-6»;

«КАСКАД» — Ленинградского кораблестроительного института для ЭВМ «М-220»;

«КОРПУС» — Ленинградского института «Промстройпроект» для ЭВМ «М-220»;

«СПРИНТ» — Московского института инженеров транспорта на ЕС ЭВМ;

«МАРСС-ЕС» — ЦНИПИАСС для ЕС ЭВМ;

«ЛИРА» — НИИАСС для ЕС ЭВМ.

Этой проблеме уделяется большое внимание и за рубежом.

К наиболее известным разработкам относятся:

ASAS — фирмы «W. S. Atcins and Partners», США;

EASE — фирмы «Engineering Analysis», Великобритания;

STARDYNE — фирмы «Mechanics Research», США;

STRUDL — Массачусетского технологического института, США;

NASTRAN — Национального управления по авиации и космическим исследованиям, США;

MARS-STRUS — фирмы IBM, США;

ASKA — Штутгартского университета, ФРГ;

SESAM — Норвежского технического института;

«CASPX» — фирмы «Swan-Wooster Engineering Co», Канада.

Большое число имеющихся вычислительных комплексов свидетельствует о сложности проблем, связанных с реализацией МКЭ на вычислительных машинах, и невозможности их однозначного решения.

Условно все имеющиеся программы и вычислительные комплексы можно разделить на исследовательские и промышленные. Характерная черта первых — ориентация на решение узкого, иногда уникального класса задач. Во главу угла здесь ставится скорость создания программы и быстрое проведение намеченного численного эксперимента, что безусловно идет в ущерб удобству пользования. Обреченные работать без притока новых идей, навеянных опытом широкой эксплуатации, эти программы, быстро сослужив свою службу, отмирают. Промышленные программы, как правило, отмирают вместе с типом ЭВМ, на который они ориентированы. До сих пор успешно функционирует на ЭВМ «Минск-22» первая отечественная разработка «МКЭ». Несмотря

на ограниченную библиотеку конечных элементов и ограничения на порядок системы решаемых уравнений, эта программа, благодаря удобству в пользовании, обладает большой живучестью и получила широкое распространение.

Отличительные черты промышленных программ:

ориентация на широко распространенный тип ЭВМ;

сильно развитая сервисная часть, обеспечивающая диагностику ошибок и удобство подготовки исходных данных, чтения результатов счета, работы за пультом ЭВМ;

универсальность;

быстродействие;

модульная структура, обеспечивающая пополнение программы вновь разработанными блоками или замену устаревших модернизированными.

Реализация всех этих принципов приводит к значительному увеличению объема разработки, которую уже можно классифицировать как «программный комплекс» или «вычислительный комплекс».

Основа промышленной разработки — безусловно сервисная часть. Ее создание чрезвычайно трудоемко хотя бы потому, что здесь в основном реализуются логические операции, несвойственные цифровым ЭВМ. Трудности создания повышенного комфорта растут экспоненциально и часто недооцениваются. В связи с этим при разработке промышленных комплексов необходимо находить приемлемый компромисс между конкретными возможностями и требованиями минимального сервиса. Противоречивы также требования универсальности и удобства в эксплуатации, обуславливающие появление дополнительных блоков, требованиям быстродействия. Требования быстродействия в промышленных программных разработках, как правило, удается удовлетворить за счет написания всей программы или отдельных, наиболее важных в смысле быстродействия, блоков на языках низкого уровня (рабочие коды, автокод, язык символического кодирования, ассемблер) и использования специфических особенностей технического исполнения ЭВМ. Характерна в этом отношении программа «МИРАЖ» [15], разработанная в 1971 г. для ЭВМ «Минск-22». По этой программе можно рассчитать систему, состоящую из элементов различных типов, например пластину, подпертую ребрами, рамносвязную систему и т. п. В случае если система достаточно велика или состоит из набора отдельных однотипных частей, программа предоставляет возможность рекурсивного расчета, который заключается в раздельном расчете отдельных частей конструкции (суперэлементов) с последующим объединением их в общую систему. Указания по разделению системы на суперэлементы приводятся в исходных данных. Дальнейшая организация рекурсивного расчета проводится автоматически.

Опыт эксплуатации программы показал, что использование суперэлементов приводит к сокращению объема исходной инфор-

<i>Ввод исходных данных. Порректировка, образование архива</i>
<i>Обработка исходных данных. Библ. 5</i>
<i>Диагностика ошибок. Библ. 6</i>
<i>Составление внутренних форматов. Библ. 1</i>
<i>Настройка внутренних форматов. Библ. 7</i>
<i>Составление матрицы канонических уравнений МКЭ. Библ. 8, 11, 12</i>
<i>Составление правых частей каноничес- ких уравнений. МКЭ. Библ. 9, 11, 12</i>
<i>Решение канонических уравнений</i>
<i>Вычисление усилий. Библ. 10, 11, 12</i>
<i>Выполнение элементов автоматизирован- ного конструирования</i>

Библиотеки		
1	Признаки системы	Конечные элементы
2	Жесткостные характеристики	
3	Общие нагрузки	
4	Общие поля	
5	Системы координат	
6	Диагностика ошибок	
7	Настройка	
8	Составление матрицы жесткости	
9	Приведение местной нагрузки к узловой	
10	Вычисление усилий	
11	Составление матриц направляющих косинусов	
12	Перемножение на матрицы направляющих косинусов	

Рис. 4.11

мации, более удобному получению результатов счета, сокращению времени счета и, что наиболее важно, значительному ослаблению ограничений на размеры решаемой задачи. Имеются примеры решения по программе «МИРАЖ» задач, включающих более 100 000 уравнений.

Большие возможности ЭВМ третьего поколения как в техническом (большое быстродействие, быстрая внешняя память), так и в системном математическом обеспечении (удобнее операционная система, оптимизирующие трансляторы) позволили значительно расширить возможности вычислительных комплексов реализующих МКЭ.

Характерный пример современной разработки в этом смысле — вычислительный комплекс «ЛИРА» [23], разработанный в НИИАСС Госстроя СССР на основе Операционной системы для ЭВМ Единой системы (ОС ЕС) на языках АССЕМБЛЕР и ПЛ/1.

Последовательность решения задачи по ВК «ЛИРА» выглядит следующим образом (рис. 4.11). Исходные данные подготавливаются на бланках, снабженных подробными комментариями с тем, чтобы эта процедура могла выполняться специалистом без особой подготовки. Подготовка исходной информации максимально упрощена. Широко используется принцип умолчания, заключающийся в том, что для самых распространенных случаев информация не указывается, а вырабатывается автоматически. Имеется ряд операторов, позволяющих компактно описывать регулярные структуры и учитывать различные сингулярности. Координаты узлов можно задавать в различных системах (декартовой, цилиндрической, сферической и т. п.), жесткостные характе-

ристики можно задавать либо непосредственным указанием их величин, либо заданием размеров сечений элементов. После ввода исходных данных в ЭВМ они при необходимости записываются в архив. Если они уже находились в архиве, а введены только корректировочные документы, то происходит их вызов из архива и корректировка.

При необходимости можно получить графическое изображение расчетной схемы с нумерацией узлов и элементов (это особенно важно, если расчленение системы на элементы было выполнено автоматически), обозначением граничных условий и основных размеров, а также изображение схем нагружений, где обозначены приложенные нагрузки с привязками и величинами. При подготовке исходных данных предусмотрено использование диалогового режима: введенная расчетная схема и схемы нагружений последовательно высвечиваются на графическом дисплее и можно визуально проверить правильность задания исходных данных и при необходимости внести нужные изменения: убрать или добавить элемент или нагрузку, изменить координаты узла, размер нагрузки, тип жесткости элемента, условие закрепления узла и т. п.

После ввода и корректировки исходных данных происходит их обработка, заключающаяся в трансляции исходных данных из вида, удобного для пользователя, в вид, удобный для дальнейшей машинной обработки. Затем происходит диагностика формальных ошибок. Опыт массовой эксплуатации вычислительных комплексов для прочностного расчета конструкций показывает, что ситуации, когда задача на счет не выходит, а причина неизвестна или трудно диагностируема, крайне нежелательны. Поскольку с самого начала трудно предусмотреть все случаи обнаружения формальных ошибок, их поиск реализован в виде обращения к библиотеке процедур, которая может непрерывно пополняться в случае обнаружения новых видов ошибок.

После того как исходная информация приведена к виду, удобному для дальнейшей обработки, происходит составление «внутренних форматов элементов». Внутренним форматом элемента условно называется собранная в одном месте информация об одном элементе (номера узлов, их координаты, номера степеней свободы для узлов, принадлежащих этому элементу, жесткостные характеристики, местные нагрузки, различные признаки, управляющие дальнейшей обработкой этого элемента — необходимость вычисления для него усилий, расчетных сочетаний, дробление и т. п.). Хотя первоначально заданная информация несколько дублируется (например, координаты одного и того же узла, принадлежащего нескольким конечным элементам, будут дублироваться несколько раз,) наличие быстрой внешней памяти на ЕС ЭВМ, а также различных буферов, организуемых операционной системой, практически аннулирует этот недостаток. Однако время счета в дальнейшем резко повышается, так как при дальнейшей обработ-

ке элементов (составление уравнений, приведение местной нагрузки к узловой, вычисление усилий, расчетных сочетаний) не надо тратить время на поиск информации в различных местах — она собрана в одном месте и находится в фиксированных точках. Кроме того, такая организация информации позволила открыть широкий фронт для разработки системы, сразу привлечь к разработке большую группу специалистов.

Наличие внутренних форматов элементов может служить отправной точкой для генерации различных версий вычислительного комплекса. Так, может быть полностью изменена система задания исходных данных, а программное обеспечение собственно счета, основанное на внутренних форматах, остаться без изменений.

После составления внутренних форматов происходит их настройка, вызванная тем, что каждый конечный элемент имеет свою специфику, которую трудно учесть в универсальном модуле составления внутренних форматов. Здесь же происходит дополнительная диагностика формальных ошибок, которые присущи тому или иному конечному элементу. Так, например, если конечный элемент прямоугольный, то происходит проверка соответствия координат этой форме. Составление матрицы канонических уравнений по сути включает: последовательный просмотр всех элементов, вызов для каждого элемента соответствующего ему внутреннего формата, процедуру составления матрицы жесткости, собственно процесс составления матрицы жесткости, перевод ее в общую систему координат и рассылку коэффициентов этой матрицы в общую матрицу канонических уравнений в соответствии с вектором номеров степеней свободы для этого элемента.

Составление правых частей уравнений при узловой нагрузке происходит обычным образом, т. е. значение узловой нагрузки засылается в вектор правых частей по адресу, соответствующему номеру степени свободы, по направлению которой приложена нагрузка. В случае если нагрузка приложена по области конечного элемента, то происходят вызов внутреннего формата этого элемента и процедуры приведения местной нагрузки к узловой. Местная нагрузка приводится к узловой, переводится в общую систему координат и в соответствии с вектором степеней свободы рассылается в вектор свободных членов общей системы уравнений. Решение системы линейных уравнений происходит методом исключения, алгоритм которого во многом аналогичен ранее описанному алгоритму (см. п. 1.4). Отличие заключается лишь в том, что здесь существенно используется быстрая внешняя память (магнитные диски), а количество обращений к магнитным лентам сокращается. Если же система линейных уравнений целиком помещается на дисках, то обращение к магнитным лентам вообще не происходит. Имеется возможность составления и решение уравнений выполнять с двойной точностью. Полученные в результате решения уравнений перемещения сортируются таким

образом, чтобы перемещения, относящиеся к одному элементу, находились в одной группе.

Затем на основе последовательного считывания для каждого элемента соответствующих ему внутреннего формата процедуры вычисления усилий и группы перемещений производится вычисление усилий. Вычисленные усилия распечатываются в табличной форме со снабжением необходимой индексацией, а при необходимости запоминаются для дальнейшей обработки (расчетные сочетания, подбор сечений, проверка напряжений, выработка рекомендаций для рационального конструирования и т. п.). Имеется возможность управлять печатью, т. е. в исходных данных указывать места (узлы, элементы), в которых представляют интерес значения перемещений, усилий, напряжений (отказываясь от печати этих компонентов в других местах).

Кроме статического расчета, который может быть применен для конструкций самого широкого назначения (строительных, транспортных, машиностроительных, судостроительных), вычислительный комплекс позволяет автоматизировать ряд других процессов проектирования конструкций:

- рассчитать на сейсмические и динамические воздействия (импульс, удар, гармонические колебания и т. п.), а также на ветровые нагрузки с учетом пульсации ветрового потока;

- выбрать расчетные сочетания усилий как для стержневых, так и для пластинчатых элементов;

- по полученным расчетным усилиям унифицировать элементы;

- подобрать арматуру в сечениях железобетонных элементов (стержневых и пластинчатых);

- рассчитать сечения стальных конструкций.

Предполагается подключение к вычислительному комплексу модулей, позволяющих в диалоговом режиме по имеющимся в архиве прототипам выполнять автоматизированное конструирование отдельных элементов железобетонных и стальных конструкций.

В этом вычислительном комплексе по аналогии с ранее разработанными [14, 15, 19] решен важный вопрос о совмещении в одной вычислительной системе преимуществ универсальной и специализированных программ. В основном это было решено за счет наличия библиотеки конечных элементов, реализации принципа «повторений», давшего возможность резко сокращать объем исходной информации при наличии регулярностей (как правило, специализированные программы, ориентированные на расчет регулярных структур, имеют компактную исходную информацию) и наличия ряда признаков, позволяющих задавать исходные данные и получать результаты счета в виде, характерном для решаемой задачи. Так, для расчета по программе систем частного вида введен ряд признаков, который дает возможность задавать исходную информацию и получать результаты в виде, характерном для данной системы.

В основном признаки системы обуславливаются набором степеней свободы в узле и геометрией (плоская, пространственная) системы, например:

признак 1 (узел обладает двумя линейными перемещениями и двумя координатами) служит для расчета плоских шарнирно-стержневых систем, плоского напряженного состояния и т. п.;

признак 2 (узел обладает тремя степенями свободы, двумя линейными и одним угловым перемещениями и двумя координатами) предназначен для расчета плоских рамных конструкций;

признак 3 (узел обладает тремя степенями свободы — вертикальное перемещение и два угловых и двумя координатами) служит для расчета балочных ростверков, плит, плит на упругом основании;

признак 4 (узел обладает тремя степенями свободы — три линейных перемещения и тремя координатами) предназначен для расчета пространственной шарнирно-стержневой системы, трехмерного напряженного состояния;

признак 5 (узел обладает шестью степенями свободы — три линейных и три угловых перемещения и три координаты) служит для расчета пространственных стержневых систем общего вида.

Имеется и ряд других признаков, содержащих специфические наборы степеней свободы для узла и предполагающих использование различных специальных конечных элементов — конечные элементы многослойных плит, конечные элементы Богнера — Фокса — Шмита, содержащие степень свободы типа $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$, и т. п.

Как видно из рис. 4.11, в этом комплексе широко развит библиотечный принцип.

Кратко перечислим функциональное назначение каждой библиотеки:

1 — признаки системы. Библиотека дает возможность задавать информацию в виде, характерном для частных задач. В соответствии с задаваемым признаком системе та или иная процедура нумерует степени свободы (так, для рамной системы для каждого узла генерируются три степени свободы, для плоской фермы — две и т. п.), перестраивает структуру задаваемых координат (для плиты задаются координаты x, y , для рамной системы x, z и т. п.) и выполняет другие подобные операции;

2 — жесткостные характеристики. Библиотека обеспечивает вычисление геометрических характеристик сечения по задаваемым размерам;

3 — общие нагрузки. Эти процедуры обеспечивают возможность задания нагрузки по общим областям, не совпадающим с расчетной сеткой;

4 — общие поля. Библиотека обеспечивает возможность задания общей топологической информации о системе — геометрия области, характеристика расчетной сетки (прямоугольная, треугольная, шаг сетки и т. п.). Нумерация узлов, вычисление координат, состав конечных элементов производятся автоматически;

5 — системы координат. Библиотека обеспечивает возможность задания геометрии системы и нагрузок в различных системах координат (декартовой, сферической, цилиндрической, произвольной поверхности второго порядка, уравнение которой задается);

6 — диагностика ошибок. Каждая процедура этой библиотеки ориентирована на поиск одной или нескольких ошибок в определенной части исходной информации. Поиск ошибок происходит так: последовательно просматриваются все процедуры этой библиотеки. Каждая процедура вызывает ту часть исходной информации, которую она диагностирует. Если ошибка обнаружена, о ней выдается сообщение с точным указанием места и характера ошибки;

7, 8, 9 и 10 — каждому конечному элементу соответствуют четыре процедуры, которые помещаются в четырех библиотеках. Назначения этих библиотек ясны из их названия;

11 и 12 — эти библиотеки обеспечивают перевод из местной системы координат в общую и наоборот.

Наличие библиотек позволяет достаточно легко расширять возможности комплекса, корректировать неудачно выполненные его части. Этот комплекс благодаря возможности изменения его конфигурации при счете той или иной задачи можно классифицировать как пакет сложной структуры со специализированным монитором.

Модули комплекса, определяющие его быстродействие и надежность (компилирующие программы, каталогизированные процедуры, блоки составления и решения уравнений), были написаны на языке «АССЕМБЛЕР». Остальные менее ответственные модули были написаны на языке ПЛ/1 (использовался оптимизирующий транслятор). Ориентация на современное системное матобеспечение (ОС.41 и элементы ОС6.1) дает возможность организовать счет в режиме прерывания и мультипрограммирования, без труда эксплуатировать вычислительный комплекс с различной конфигурацией ЭВМ и различными типами устройств, а также минимальный комплект ЭВМ, на котором может функционировать комплекс — оперативная память объемом 256 кб, и два дисководов, по 7,25 мб.

Анализ характеристик отечественных разработок («МКЭ», «МИРАЖ», «ЛИРА») и подобных зарубежных («АСКА», «СЕЗАМ») показывает (табл. 4.2), что возможности этих комплексов практически сравнимы, несмотря на то, что зарубежные разработки ориентированы на значительно более мощные технические ресурсы.

Характеристика	Вычислительные комплексы				
	„СЕЗАМ“	„АСКА“	„МЭИ“	„МИРАЖ“	„ЛИРА“
<i>Стержень</i>					
Пространственный	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
С жесткими вставками	„	Нет	„	„	„
С учетом сдвига	„	Есть	„	„	„
На упругом основании	Нет	Нет	„	„	„
Криволинейный	Есть	Есть	Нет	„	„
<i>Плоское напряженное состояние</i>					
Прямоугольник	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Треугольник	„	„	„	„	„
Произвольный	„	„	Нет	„	„
Четырехугольник	„	„	„	„	„
Прямоугольник и треугольник с промежуточными узлами по сторонам	Нет	Есть	„	Нет	„
<i>Тонкая плита</i>					
Прямоугольник	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Треугольник	Нет	„	Нет	„	„
Произвольный	„	Нет	„	Нет	„
Четырехугольник	„	„	„	„	„
<i>Плита на упругом основании</i>					
Прямоугольник	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть
Треугольник	„	„	„	„	„
Элементы упругого основания, работающие за пределами плиты	„	„	„	„	„
<i>Тонкая оболочка</i>					
Прямоугольник	Есть	Нет	Нет	Есть	Есть
Треугольник	„	Есть	„	„	„
Произвольный	„	Нет	„	Нет	„
Четырехугольник	„	„	„	„	„
<i>Трехмерное напряженное состояние</i>					
Тетраэдр	Нет	Есть	Нет	Есть	Есть
Параллелепипед	„	„	„	„	„
Призма	„	„	„	„	„

Характеристика	Вычислительные комплексы				
	„СЕЗАМ“	„АСКА“	„МЭИ“	„МИРАЖ“	„ЛИРА“
Произвольный выпуклый восьмиугольник	Есть	Есть	Нет	Нет	Есть
Количество рангов суперэлементной рекурсии	6	0	0	1	8
Возможность решения композитных систем	Есть	Есть	Нет	Есть	Есть
Количество элементов	800	6 900	1 000	1 024	2 048
Количество узлов со связями	200	465	1 000	512	2 048
Количество загрузений	6	720	3 640	64	100
Количество суперузлов в суперэлементе	200	—	—	64	256
Количество неизвестных для основной системы или для суперэлемента	3 000	14 000	3 000	3 500	10 000
Ширина ленты	1 000	14 000	60	1 700	5 000
Возможность пополнения бнб-библиотеки КЭ	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Блок поиска формальных ошибок	„	„	Нет	„	„
Сокращение информации при наличии регулярностей	„	„	„	„	„
Табличная выдача результатов счета	„	„	Есть	„	„
Возможность задания исходной информации в различных системах координат	Нет	Нет	Нет	„	„
Тип ЭЦВМ	УНИВАК-1108	УНИВАК-1108	МИНСК-22	МИНСК-22	ЕС-1022 и выше
Язык программирования	ФОРТРАН	ФОРТРАН	РАБ. КОДЫ	РАБ. КОДЫ	АССЕМБЛЕР ПЛ/1

5.1. Примеры численного исследования мостовых конструкций

Пример 1. Расчет бездиафрагменного пролетного строения моста. При проектировании конструкций в первую очередь нужны значения моментов и поперечных сил в характерных сечениях. Для получения M и Q достаточно для практических целей точность дает дискретная стержневая модель. В то же время стержневая модель имеет ряд преимуществ, таких, как например, значительная экономия времени решения. В качестве примера рассмотрим расчет разрезного железобетонного пролетного строения (рис. 5.1) пролетом $L=18$ м. Пролетное строение состоит из восьми двутавровых балок одинакового сечения с постоянной жесткостью по длине. Балки объединены плитой толщиной $t=0,15$ м. Балки имеют момент инерции относительно главной оси $I_x=0,0874$ м⁴ и момент инерции при кручении $I_k=0,00512$ м⁴. Площадь поперечного сечения балки $F=0,5778$ м².

Для расчета принята стержневая модель, представляющая собой систему перекрестных балок. Продольные балки имеют такие же характеристики, как и у реальной конструкции. Плита заменяется поперечными балками, параметры которых выбираются исходя из равенства энергий деформации плиты и заменяющего ее стержня. Применен конечный линейный элемент, имеющий шесть степеней свободы (см. табл. 2.1). Каждая балка пролетного строения по длине разбита на восемь элементов. Построены поверхности влияния прогибов. Расчетная схема (которая в данном случае построена программным путем) включала 190 элементов и 135 узлов. Порядок системы линейных уравнений составлял 405. Ширина ленты — 48. Время счета, включая печать, на одну поверхность влияния на машине ЕС-1022 — около 1 мин. Расчет выполнен по программе «МОДЕЛЬ», ориентированной на расчет бездиафрагменных и плитных пролетных строений. В табл. 5.1 приведены ординаты одного из сечений по поверхности влияния ($\alpha=0,5L$) для крайней балки в сечении $y=0,25L$; для сравнения даны результаты решения в гиперболо-тригонометрических рядах [71].

Таблица 5.1

Положение силы $P=1$ в поперечном направлении	Положение силы $P=1$ в про- дольном направлении при $\alpha=0,25 L$		Положение силы $P=1$ в поперечном направлении	Положение силы $P=1$ в про- дольном направлении при $\alpha=0,25 L$	
	по МКЭ	по [71]		по МКЭ	по [71]
0,0	2,209	2,218	0,562B	0,054	0,058
0,062B	1,712	1,716	0,625B	0,030	0,032
0,125B	1,219	1,211	0,687B	0,009	0,001
0,187B	0,789	0,783	0,75B	0,002	-0,033
0,25B	0,456	0,448	0,812B	-0,051	-0,069
0,312B	0,283	0,270	0,875B	-0,093	-0,106
0,375B	0,162	0,159	0,937B	-0,112	-0,140
0,437B	0,110	0,112	B	-0,159	-0,173
0,5B	0,076	0,082			

¹ Примеры, приведенные в этой главе, демонстрируют разнообразие задач, решаемых с помощью МКЭ, и в какой-то мере позволяют оценить возможности метода. Большинство приведенных примеров представляет собой реальные объекты, рассчитывавшиеся в проектных и научно-исследовательских организациях при участии авторов. Примеры приводятся с описанием расчетных схем и с некоторыми результатами расчетов.

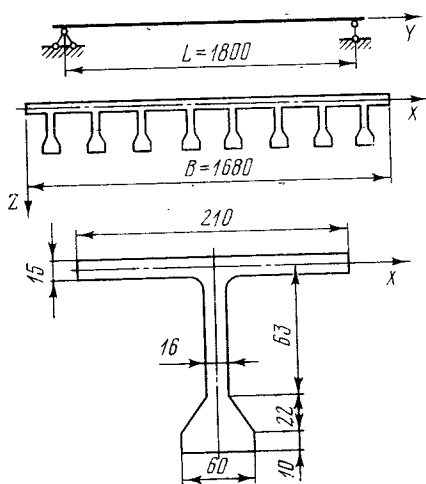


Рис. 5.1

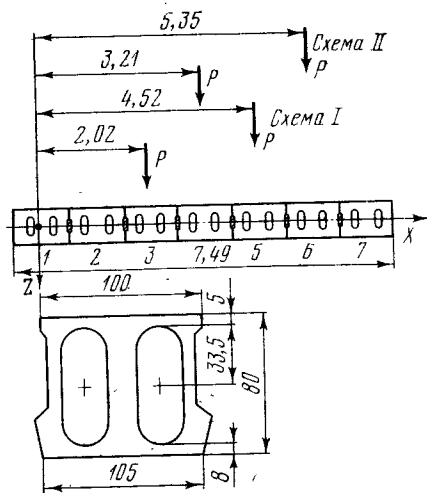


Рис. 5.2

Пример 2. Расчет плитного пролетного строения моста. Этот пример, равно как и предыдущий, демонстрирует расчет по простейшей модели — стержневой. Рассчитано плитное железобетонное сборное пролетное строение из пустотных элементов. Поперечные сечения пролетного строения и пустотного элемента показаны на рис. 5.2. Семь двухпустотных плит конструкции Госдорнии объединены между собой шпоночными швами. Принято считать, что шов передает только перерезывающие силы, а изгибающий момент в шве $M_v = 0$.

В соответствии с принятой схемой работы шва поперечные стержни модели имеют шарниры, моделирующие шов.

Геометрические характеристики пролетного строения: площадь поперечного сечения $F = 0,3628 \text{ м}^2$; момент инерции сечения $I_x = 0,03037 \text{ м}^4$; момент инерции при свободном кручении $I_k = 0,0406 \text{ м}^4$.

Геометрические характеристики элементов модели, как и в предыдущем примере, вычисляются из равенства энергий деформации реальной конструкции и стержневой модели. Конечные элементы приняты двух типов — линейный конечный элемент, имеющий шесть степеней свободы (см. табл. 2.1) и пять степеней свободы. В расчете получены относительные прогибы в восьми сечениях пролетного строения и изгибающие моменты M_x в восьми сечениях каждой из балок. Расчетная схема включает 152 элемента, 117 узлов.

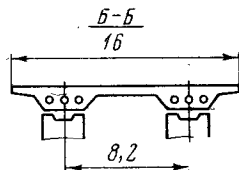
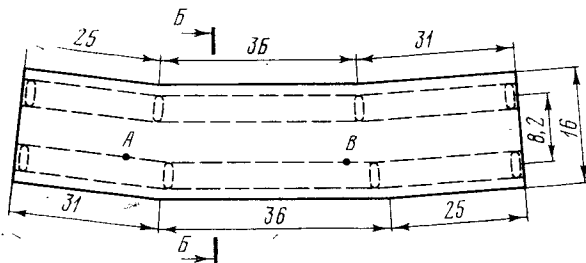


Рис. 5.3

Таблица 5.2

№ балки	Относительный прогиб от нагрузки $p=38$ тс/м		
	А	Б	В

Симметричное нагружение

1	0,1194	0,1240	0,1273
2	0,1354	0,1394	0,1392
3	0,1513	0,1562	0,1495
4	0,1624	0,1608	0,1546
5	0,1576	0,1562	0,1525
6	0,1417	0,1394	0,1437
7	0,1322	0,1240	0,1331

Несимметричное нагружение

1	0,0794	0,0948	0,0822
2	0,1008	0,1066	0,0962
3	0,1237	0,1307	0,1223
4	0,1496	0,1575	0,1527
5	0,1664	0,1689	0,1730
6	0,1801	0,1748	0,1834
7	0,1862	0,1665	0,1900

Примечание. В графе А приведены результаты натурных испытаний, заимствованные из работы [65], Б — прогибы, вычисленные по программе «МОДЕЛЬ», В — результаты расчетов в тригонометрических рядах [65] для сравнения.

Таблица 5.3

h/a	$w \cdot 10^{-3}$ см						
	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
1/20	9,84	15,85	15,26	17,01	16,87	9,36	9,90
1/18	5,18	11,00	10,84	11,91	11,85	6,94	7,26
1/15	2,19	6,61	6,57	7,15	7,11	4,45	4,62
1/10	0,61	2,12	2,24	2,36	2,36	1,64	1,67
1/7	0,15	0,89	0,91	0,99	0,99	0,67	0,70
1/5	0,04	0,41	0,42	0,43	0,46	0,28	0,29
1/3	0,01	0,14	0,12	0,12	0,15	0,06	0,06

Примечание. Прогибы в центре трехслойных шарнирно опертых пластин даны: в графе А — при расчете по классической теории; в графе Б — по предлагаемой теории, когда решается система дифференциальных уравнений в частных производных двенадцатого порядка, учитывающих явление поперечного сдвига; в графе В и Г — при применении МКЭ к функционалу, в котором учтены поперечный сдвиг и нормальное обжатие; в графе Д — результаты точного решения шарнирно опертой пластины [7]; в графе Е — результаты прогибов в центре защемленных трехслойных пластин, полученные при применении МКЭ, в случае учета поперечного сдвига; в графе Ж — то же, поперечного сдвига и нормального обжатия.

Порядок системы линейных уравнений — 351, ширина ленты — 42. Время счета, включая печать, на машине ЕС-1022 — менее 1 мин. Расчет произведен по программе «МОДЕЛЬ».

В табл. 5.2 приведены относительные прогибы по схемам (см. рис. 5.2) симметрично I и несимметричного II нагружения линейно распределенной нагрузкой $p=38$ тс/м. За единицу принят прогиб в рассматриваемом сечении одной балки, нагруженной нагрузкой $2p$.

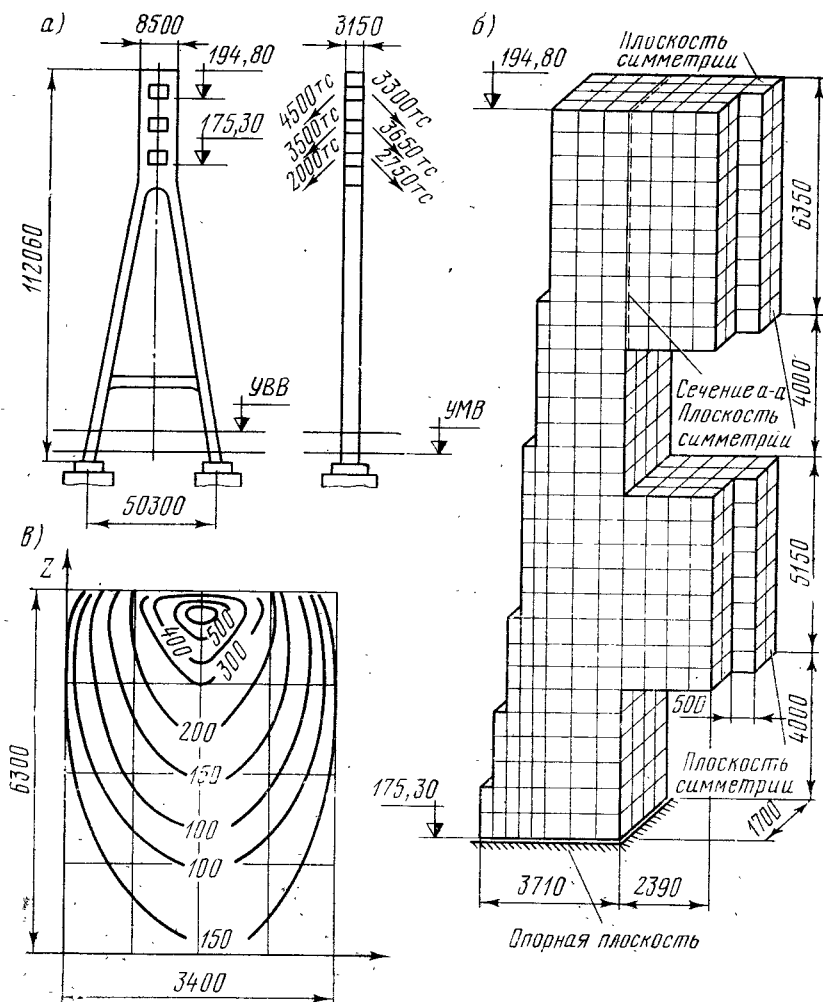


Рис. 5.6

В этом примере, как и в предыдущем, есть хорошая сходимость с расчетами по другим методам и с экспериментом. Опыт применения стержневой модели для расчета дает возможность применять ее при проектировании мостов.

Пример 3. Расчет пролетного строения путепровода. В этом примере дискретная модель представлена конечным элементом изгибаемой плиты (см. табл. 2.4). В результате расчета были построены поверхности влияния моментов M_x , M_y и поперечных сил Q_x , Q_y для характерных точек системы.

Конструктивная схема пролетного строения представлена на рис. 5.3. Она представляет собой трехпролетное косое пролетное строение с точечными опорами. Створ торцовых опор ортогонален оси пролета, а створ средних опор пересекает ось пролета под углом 35° . Пролеты перекрыты сборными железобетонными панелями таврового сечения с продольными пустотами.

Расчет пролетного строения производился как расчет изгибаемой пластины переменной толщины, опирающейся на точечные опоры. При расчете использовался прямоугольный конечный элемент изгибаемой плиты с тремя степенями свободы в узле. Всего расчетная схема включала 350 элементов и 396 узлов. Порядок системы линейных уравнений составлял 1180, ширина — 40. Время расчета загрузки, необходимых для построения поверхности влияния для 20 точек, составляло 55 мин. На рис. 5.4, а и б представлены поверхности влияния изгибающих моментов M_x для двух точек (соответственно А и В на рис. 5.3), построенные по результатам машинного расчета.

Пример 4. Расчет плиты с поперечными пустотами. В последнее время изучается возможность применения в качестве элемента пролетного строения мостов плиты с поперечными пустотами. В отличие от широко применяющихся плит с продольными пустотами изучаемые плиты более технологичны в изготовлении. Подробные исследования напряженно-деформированного состояния плиты были выполнены с использованием объемных конечных элементов (см. табл. 2.14 и 2.15).

Конструктивная схема плиты длиной 15 м представлена на рис. 5.5, а. Размеры панели — $1,0 \times 0,6 \times 15,0$ м. Панель имеет 26 поперечных пустот диаметром 0,45 м. Нагрузка равномерно распределенная — $0,5$ тс/м². Панель шарнирно оперта по торцам и имеет две взаимно ортогональные плоскости симметрии, которые учтены при расчете. Расчет панели был поставлен как решение трехмерной задачи теории упругости. Использованы трехмерные конечные элементы в виде параллелепипеда и тетраэдра. Расчет производился по ВК «МИРАЖ» с использованием суперэлементов. Рассчитываемая четверть панели была расчленена на 14 суперэлементов (рис. 5.5, б) трех типов (рис. 5.5, в): первый содержит 578 конечных элементов и 350 узлов, из них 30 суперузлов; второй тип — 560 конечных элементов и 405 узлов, из них 60 суперузлов; третий тип — 280 конечных элементов и 240 узлов, из них 30 суперузлов.

Изолинии прогибов верхней поверхности панели приведены на рис. 5.5, г. Задача была решена на ЭВМ «Минск-32». Время счета — 4,5 ч. Без использования суперэлементов в такой постановке задача содержала бы 7578 конечных элементов, 5060 узлов и имела бы 14 080 степеней свободы, т. е. решение на современных ЭВМ было бы практически невозможно.

Пример 5. Расчет пилона вантового моста. Пример относится к расчету уникального сооружения — вантового моста. Он рассчитывался в целом, затем уточнялось напряженное состояние ряда фрагментов. Нами рассчитана часть пилона, находящаяся между отметками 175,30 и 194,80 м (рис. 5.6, а).

Расчет поставлен как трехмерная задача теории упругости. Использован конечный элемент одного типа — параллелепипед (см. табл. 2.15). Расчетная схема (рис. 5.6, б) включает 924 элемента и 1290 узлов. Порядок системы линейных уравнений — 3350, ширина ленты — 150. Цель расчета — определение скальвающих напряжений в местах примыкания перемычек к стойкам пилона. Изолинии скальвающих напряжений для верхней перемычки показаны на рис. 5.6, в.

5.2. Расчеты многослойных конструкций

Приведенные ниже два примера демонстрируют возможности МКЭ в расчетах многослойных конструкций. Построенные матрицы жесткости позволяют учесть шесть компонентов напряженного состояния в узле, в том числе две составляющие по плоскости контакта между слоями [53, 54, 55].

Пример 1. Расчет серии трехслойных пластин. Рассчитывались квадратные (в плане) пластины с различным отношением полной толщины h пластины к ее размеру a (в плане) при действии синусоидальной нагрузки

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \quad q_0 = 0,981 \text{ кгс/см}^2.$$

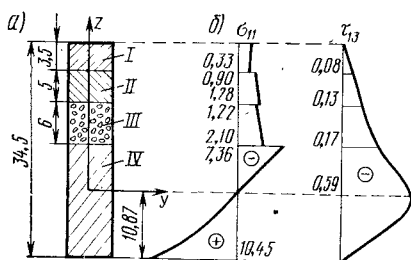


Рис. 5.7

ли соответственно $11,854 \cdot 10^{-3}$; $11,99 \cdot 10^{-3}$ и $12,54 \cdot 10^{-3}$ см. Согласно точному решению задачи [7] прогиб равен $11,852 \cdot 10^{-3}$ см.

В дальнейшем принята расчетная сетка 8×8 . При расчете использован вычислительный комплекс «СУПЕР».

Результаты прогибов в центре трехслойных шарнирно опертых пластин приведены в табл. 5.3. Анализ этих данных позволяет сделать следующее заключение: прогибы, полученные при точном решении системы дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемых пластин и при применении МКЭ в случае учета поперечного сдвига, практически совпадают; дополнительный учет деформации нормального обжатия позволяет получить почти на всем диапазоне отношений h/a решения, практически совпадающие с точными; расчет по классической теории неприменим даже для тонких пластин.

Применив полученные результаты расчета многослойных пластин при проектировании конструкций проезжей части моста, обнаружили наличие резервов в статическом расчете пролетного строения. Учитывая совместную работу дорожной одежды и железобетонной плиты, можно получить значительное снижение напряжений в арматуре и бетоне плиты.

Пример 2. Расчет дорожной одежды. Конечные элементы (см. п. 2.8) применялись для исследования напряженно-деформированного состояния многослойной дорожной одежды. Дорожная одежда принята из четырех слоев (рис. 5.7, а) со следующими характеристиками материалов:

I и II — верхний и нижний слой асфальтобетона, имеющие соответственно модули $E_1 = 0,2 \cdot 10^5$ кгс/см² и $E_2 = 0,12 \cdot 10^5$ кгс/см² при $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$;

III — черный щебень с $E_3 = 0,1 \cdot 10^5$ кгс/см² и $\nu_3 = 0,25$;

IV — жесткий цементобетонный слой с $E_4 = 2 \cdot 10^5$ кгс/см² и $\nu_4 = 0,15$.

Коэффициент постели грунтового основания на сжатие $C_1 = 15$ кгс/см², на сдвиг $C_2 = 0$. Нагрузка $q = 6$ кгс/см² принята равномерно распределенной по кругу диаметром 35 см, площадь которого равновелика площади следа колеса расчетного автомобиля.

Для расчета принята плита длиной 70 м, что обеспечивает достаточную точность получаемых результатов и шириной 7 м, равной ширине дорожной одежды. Эта плита аппроксимируется конечными элементами в виде квадратных 35×35 см элементов четырехслойной плиты, лежащей на упругом основании.

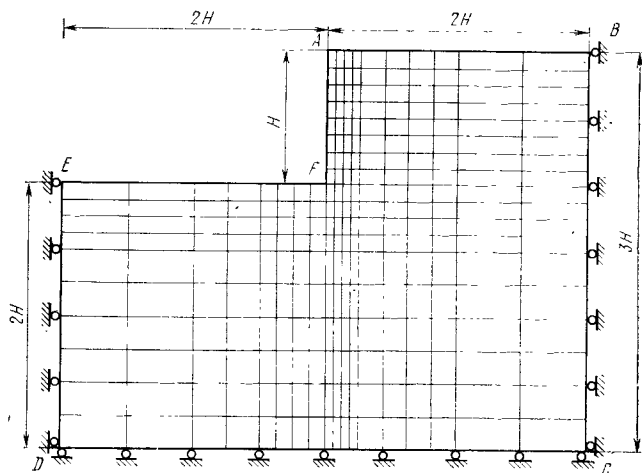
В результате расчета получен максимальный прогиб дорожной одежды $W = 0,03$ см. Эпюры продольных нормальных и поперечных касательных напряжений представлены на рис. 5.7, б.

5.3. Примеры оценки напряженно-деформированного состояния грунтовых массивов

МКЭ успешно применяется для решения задач устойчивости грунтовых массивов и расчета грунтовых массивов непосредственно. Вместе с тем имеет ряд особенностей, отражающих специфику напряженного состояния грун-

Толщина плиты $h = h_1 + h_2 + h_3$;
 $h_1 = h_3 = 0,4$ см; $h_2 = 2,0$ см; $E_1 = E_2 =$
 $= E = 2,981 \cdot 10^{-3}$ кгс/см², $E_2 : E_1 =$
 $= 10^{-2}$, где h_1, h_3 — толщина слоев;
 h_2 — толщина внутреннего слоя; $E_1,$
 $E_2, E_3, \nu_1 = \nu_3 = 0,3, \nu_2 = 0,4$ — соот-
 ветствующие модули упругости слоев
 и коэффициенты Пуассона. Предва-
 рительно была оценена точность сче-
 та по МКЭ при разбивке пластины
 прямоугольной сеткой $16 \times 16,$
 8×8 и 4×4 . Результаты прогибов в
 центре шарнирно опертой трехслой-
 ной пластины с $h : a = 1 : 18$ состави-

Рис. 5.8



тового массива. Так, в качестве критериев устойчивости грунтовых массивов можно принимать следующие положения:

1. Условие прочности Кулона — Мора:

$$\sin \theta_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \sqrt{\frac{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x + \sigma_y)^2}},$$

где $\theta_{\max}$ — наибольший угол отклонения равнодействующей напряжений от нормали к каждой возможной площадке; σ_1 , σ_2 — соответственно максимальные и минимальные главные напряжения; σ_y , σ_x — вертикальные и горизонтальные нормальные напряжения; τ_{xy} — касательные напряжения.

Если в рассматриваемой точке грунтового массива имеет место соотношение $\theta_{\max} > \varphi$ (где φ — угол внутреннего трения для данного грунта), состояние грунта оценивается как неустойчивое; при $\theta_{\max} = \varphi$ — предельное равновесие; при $\theta_{\max} < \varphi$ — состояние грунта устойчивое.

2. Оценка устойчивости по значению действующих касательных напряжений τ_{xy} . Сопоставление выполняется с сопротивляемостью сдвигу грунта $\tau_{xy} \leq [\tau]$.

3. Оценка устойчивости по допускаемым деформациям. Располагая деформационными характеристиками грунтов, путем сопоставления получаемых деформаций элементов с допускаемыми, можно устанавливать степень устойчивости массива.

Пример 1. Напряженно-деформированное состояние откоса выемки. В качестве иллюстрации практического применения МКЭ для решения задач устойчивости грунтовых массивов рассматривалась задача определения напряженно-деформированного состояния откоса выемки. В схеме дискретизации грунтового массива прямоугольными КЭ (рис. 5.8) откос AE вертикальный. Область была разбита на 260 элементов, сетка разбиения включала 297 узловых точек. Граничные условия принимались следующими:

- перемещение на границе DC равно нулю;
- на границах BC и ED горизонтальные перемещения равны нулю ($u=0$), компоненты вертикальных перемещений v неизвестны;
- перемещения на свободной поверхности $BAFE$ не ограничиваются, т. е. компоненты u , v в узловых точках этой поверхности неизвестны. Матрица жесткости элемента принята в соответствии с табл. 2.3.

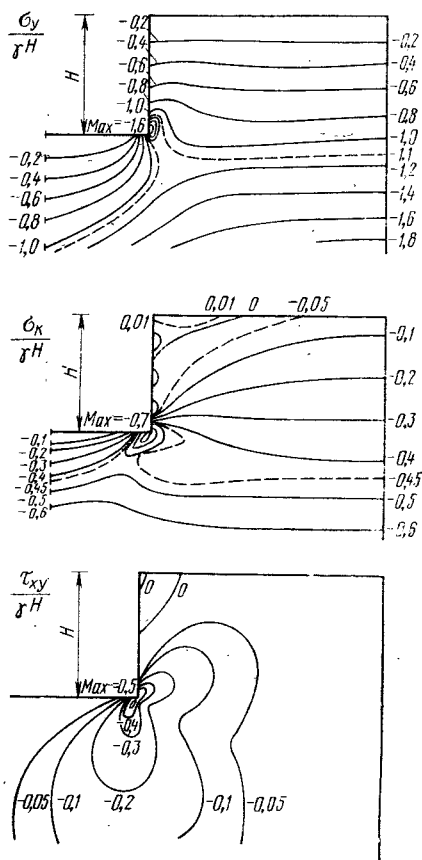


Рис. 5.9

В случае устройства выемок в связных грунтах, обладающих упруго-пластическими свойствами, при глубине выемки $H_{кр}$ в нижней части откоса начинается зарождение пластической зоны. С увеличением глубины рост напряжений ведет к увеличению размеров пластической зоны. Это увеличение зоны будет прогрессировать вплоть до перехода откоса в стадию предельного равновесия.

Такая глубина выемки $H_{кр}$ является критической и соответствует началу возникновения в откосе неупругих деформаций.

Аналогичным образом может определяться напряженно-деформированное состояние и в откосах, имеющих некоторый угол наклона к горизонту. Более удобно использование треугольных конечных элементов для дискретизации массива (рис. 5.10).

Для характерных горизонтальных уровней дорожной насыпи эпюры распределения напряжений (рис. 5.11) подтверждают правомерность высказанных предположений о механизме процессов, протекающих в грунтовом массиве дороги.

Для каждого элемента подсчитывались объемные силы (собственный вес) и прикладывались в центре тяжести элемента. Затем равнодействующие собственного веса равномерно распределялись в вершины элемента, где суммировались с составляющими от соседних элементов. На рис. 5.9 показано распределение напряжений в грунтовом массиве с выемкой, т. е. изолинии $\sigma_y / (\gamma H)$, $\sigma_x / (\gamma H)$ и $\tau_{xy} / (\gamma H)$. Наибольшей величины напряжения достигают в нижней части откоса выемки. В соответствии с критерием прочности Кулона — Мора первыми в критическое состояние переходят точки в нижней части откоса. Это происходит на такой глубине H выемки, где напряжение в нижней части откоса достигает предела прочности массива на одноосное сжатие $\sigma_{сж}$ или предельной сопротивляемости грунта сдвигу.

Если грунтовый массив представлен линейно-деформируемым материалом и откос вертикальный, то предельная высота устойчивого откоса определится из выражения

$$H_{кр} = \sigma_{сж} / \gamma,$$

где γ — объемный вес грунта массива; $\sigma_{сж}$ — прочность грунта на одноосное сжатие.

В скальных грунтах возникновение разрушений у нижней бровки откоса приведет к переходу нагрузки на менее нагруженные области откоса и их перегрузке. Таким образом, создадутся условия для прогрессирующего разрушения откоса. В этом случае предельная глубина выемки будет одновременно и предельной устойчивой глубиной.

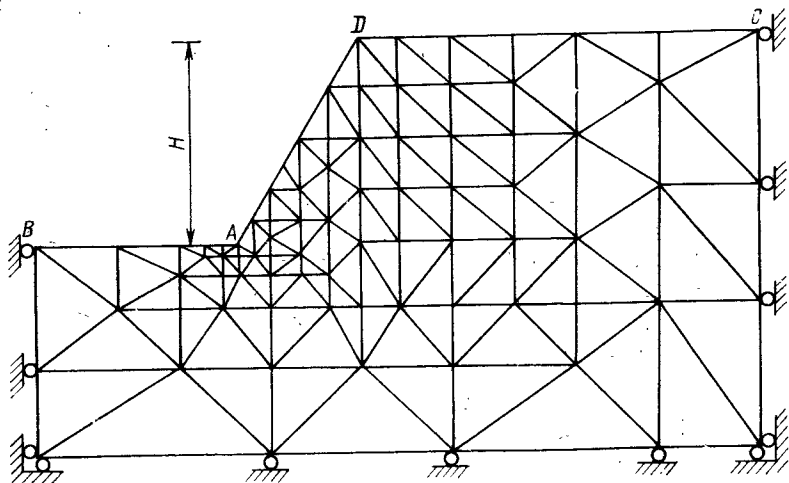


Рис. 5.10

Предельная упругая высота откоса

$$H_{кр} = \frac{\sigma_{сж}}{\gamma \left(\sin^2 \alpha + \frac{\mu}{1 - \mu} \cos^2 \alpha \right)},$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Сопоставительные расчеты по МКЭ и методам предельного равновесия показали хорошую сходимость. Выполняя такие расчеты для различных условий проектирования, можно в каждом конкретном случае определить предельную устойчивую высоту откоса $H_{пр}$. Между величинами $H_{кр}$ и $H_{пр}$ для связных грунтов существует однозначная связь, определяемая свойствами грунта. При различных значениях угла внутреннего трения ϕ и коэффициента Пуассона μ построены графики $H_{кр}$ и $H_{пр}$ (рис. 5.12). Элементы $H_{кр}$ и $H_{пр}$ приняты в относительных величинах $H_0 = \gamma H / \sigma_{сж}$. Таким образом, при известной величине $H_{кр}$ можно по графику определить и предельную устойчивую высоту откоса.

Прочность грунта в произвольной точке грунтового массива можно оценить по действующим касательным напряжениям. Определив напряжение по наиболее опасным площадкам в элементах или в узловых точках сетки конечных элементов t_i , можно найти для этих точек значения коэффициентов

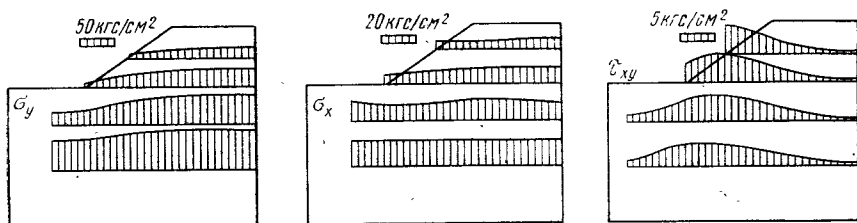


Рис. 5.11

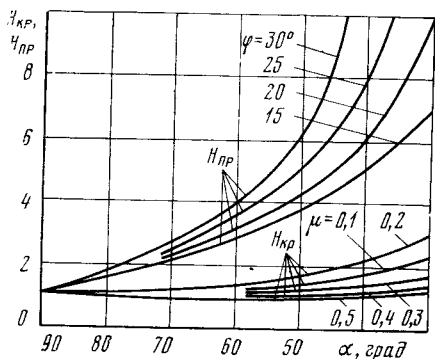


Рис. 5.12

запаса прочности $k_{\text{зап}} = [\tau]/\tau$, где $[\tau]$ — предельное сопротивление сдвигу данного грунта. Получаемые таким способом данные позволяют построить линии равных коэффициентов запаса. Области $k_{\text{зап}} > 1$ свидетельствуют о том, что грунт обладает запасом прочности; при $k_{\text{зап}} \leq 1$ в рассматриваемых точках имеет место предельное состояние, т. е. области с $k_{\text{зап}} \leq 1$ неустойчивы. Такой анализ дает возможность разрабатывать необходимые инженерные мероприятия.

Вместе с тем появление пластических зон свидетельствует о том, что в областях с $k_{\text{зап}} \leq 1$

прочность грунта в каждой точке исчерпана и грунт характеризуется иными показателями деформационных свойств, чем те, которые были заданы в первом цикле расчета. Следовательно, определенное в первом цикле распределение напряжений не будет соответствовать действительному — в области предельного состояния и вблизи ее границ вследствие изменения деформационных показателей должно произойти переформирование поля напряжений. При известных закономерностях изменения деформационных показателей и выполнении условия предельного состояния для дальнейших расчетов можно откорректировать значения этих показателей. В результате расчета получим новую картину напряженного состояния и измененные контуры областей предельного состояния. В свою очередь, это может потребовать дальнейшей корректировки показателей деформационных свойств участков массива и необходимости повторных расчетов. Уже сама тенденция к развитию или стабилизации областей предельного состояния позволит сделать выводы об устойчивости массива (откоса) и выявить наиболее опасные его зоны.

Таким образом, оценка прочности грунта массива и анализ устойчивости в случае местных (локальных) разрушений сводится к последовательным приближениям с помощью циклических расчетов, выполняемых по одной программе.

Надежность результатов таких расчетов будет во многом зависеть как от достоверности показателей, вводимых в расчет, так и от того, насколько принятые в расчете закономерности изменения деформационных показателей в областях предельного состояния соответствуют действительности.

Пример 2. Напряженно-деформированное состояние горного массива. В настоящее время известны два метода анализа напряженно-деформированного состояния горного массива, ослабляемого отверстием выработки для устройства туннеля. В одном из них, «гравитационном», анализ проводится в два этапа — сначала учитывают действие силы тяжести на конечные элементы при отсутствии выработки, а затем при ее наличии. Разности, получаемые на двух этапах анализа, дают величину напряжений, деформаций и смещений. Недостатки этого метода следующие:

полученные результаты не будут зависеть от последовательности операций только для однородного, изотропного и линейно-упругого массива;

результаты, одинаковые с результатами поэтапного анализа, получаются только в случае, если исходные напряжения непосредственно связаны через коэффициент Пуассона μ .

В другом методе, известном под названием релаксационного (или метода остаточных напряжений), элементы, имитирующие окружающий выработку грунтовой массив, принимаются нагруженными определенными заданными напряжениями, которые затем последовательно уменьшаются до достижения окончательного равновесного напряженного состояния на контуре выработки.

При этом методе хотя и возможно моделирование последовательности технологических операций, но осуществить его довольно трудно. Кроме того, релаксация напряжений определяется только напряжениями в тех элементах, которые составляют часть массива, остающуюся после проведения выработки, а напряжения в элементах, удаляемых в процессе проходки, не учитываются.

При проектировании подземных сооружений особую важность приобретает вопрос сохранения выработок в эксплуатационном состоянии в течение длительного периода времени. МКЭ позволяет с высокой степенью надежности изучить характер взаимодействия системы «отделка туннеля — грунтовый массив». На этой основе определяют величину, направление податливости и тип конструкции обделки, размеры и форму поперечного сечения выработки.

Для выработок большой протяженности, что имеет место в туннельном строительстве, можно ограничиваться рассмотрением плоской задачи. В этом случае весь массив разбивают на конечные элементы и задают граничные условия (рис. 5.13), причем в местах концентрации напряжений сетку сгущают. Если число конечных элементов достаточно велико, переходят на поэтапное рассмотрение напряженно-деформированного состояния массива. Первоначально массив разбивают на более крупные элементы, а затем, используя принцип «вырезания» отдельных областей в массиве (рис. 5.14), переходят к их детальному анализу, одновременно сгущая сетку элементов. Воздействие отброшенной части массива заменяют приложением реакций в узлах. Фрагмент распределения перемещений (в миллиметрах) в грунтовом массиве вокруг выработки показан на рис. 5.15, а изолинии вертикальных перемещений с учетом подкрепления выработки приведены на рис. 5.16.

Результаты расчетов свидетельствуют о равномерном распределении деформаций и напряжений вокруг выработки. Кроме того, ослабление массива

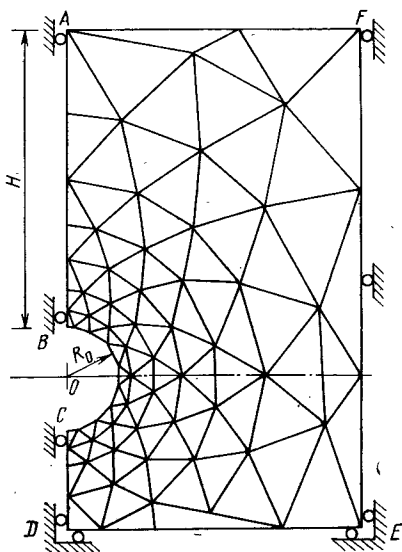


Рис. 5.13

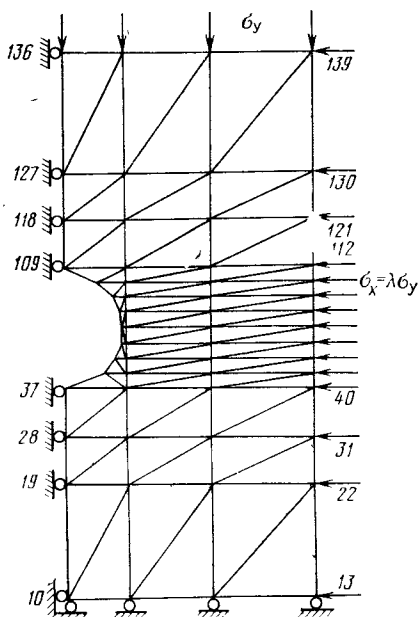


Рис. 5.14

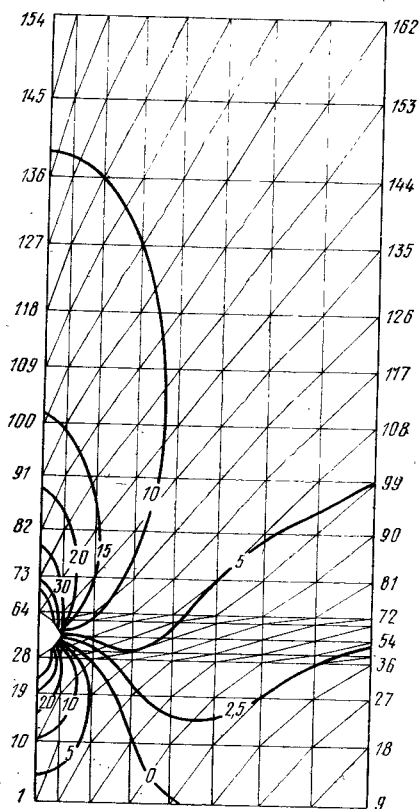


Рис. 5.15

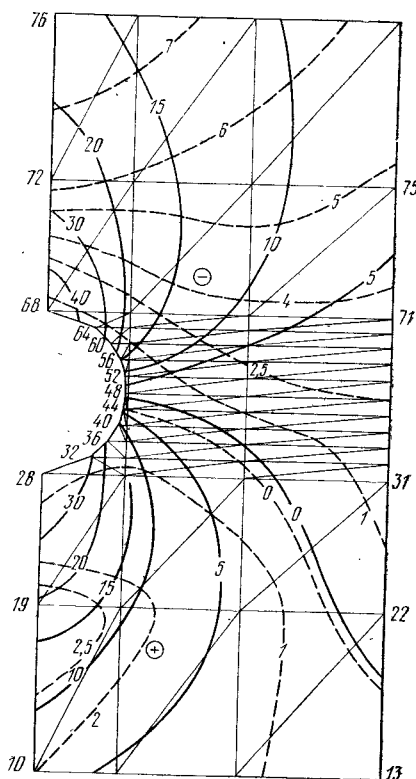


Рис. 5.16

Таблица 5.4

Характеристика	Коэффициент Пуассона				
	$\mu=0,1$	$\mu=0,2$	$\mu=0,3$	$\mu=0,4$	$\mu=0,5$
Максимальное перемещение верха грунтового массива, см	13,2	13,1	13,3	13,7	14,3
Максимальное напряжение σ_y в зоне контура отверстия, тс/м ²	77,9	77,1	75,6	73,2	69,8
Максимальное напряжение в контактной зоне опирания, тс/м ²	5,5	5,3	4,9	4,6	4,2

на отверстии вызывает концентрацию напряжений на контуре. Используя изложенные критерии оценки прочности, можно установить размеры зон неупругих деформаций, если такие возникают. Для определения текущего радиуса пластической зоны можно воспользоваться выражением

$$R_{пл} = \frac{R_0}{\sqrt{S_{pw}}} \sqrt{\sigma_y + \sigma_x + 4(\sigma_y - \sigma_x) \cos 2\theta},$$

где R_0 — радиус выработки; σ_y , σ_x — компоненты нормальных напряжений; θ — поляриный угол, отсчитываемый от оси x против часовой стрелки.

При глубине заложения туннеля в глинистой породе порядка 100 м и сопротивлении сдвигу этой породы $S_{pw} = 4$ кгс/см² радиус $R_{пл}$ изменяется по периметру от 8 до 11 м. Массы грунта в пределах этой зоны фактически формируют размер и характер проявления горного давления.

Исследования показали, что коэффициент Пуассона оказывает незначительное влияние на конечные результаты (табл. 5.4).

Опыт применения МКЭ для расчета напряженно-деформированного состояния грунтовых массивов показывает его высокую эффективность и точность в решении задач устойчивости транспортных сооружений.

Список литературы

1. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ/А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошиников, В. А. Смирнов. М., Стройиздат, 1976, ч. I, 248 с., ч. II, 237 с.
2. Амусин Б. З., Фадеев А. Б. Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики. М., Недра, 1975. 143 с.
3. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности, ползучести. М., Высшая школа, 1968. 512 с.
4. Безухов Н. И., Лужин О. В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. М., Высшая школа, 1974. 200 с.
5. Берг О. Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. М., Госстройиздат, 1962. 96 с.
6. Биргер И. А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности. — Прикладная механика и математика, 1951, т. XV, вып. 6, с. 765—770.
7. Брюккер Л. Э. Некоторые варианты упрощения уравнений изгиба трехслойных пластин. — В кн.: Расчет элементов авиационных конструкций. М., Машиностроение, 1965, с. 74—99.
8. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., Наука, 1973. 415 с.
9. Гибшман М. Е. Теория расчетов мостов сложных пространственных систем. М., Транспорт, 1973. 200 с.
10. Городецкий А. С. К расчету тонкостенных железобетонных конструкций в неупругой стадии. — Тр. НИИСК, 1965, вып. 6, с. 86—93.
11. Городецкий А. С. Линеаризация уравнений, описывающих напряженное состояние физически нелинейных стержневых систем. — В кн.: ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. Вып. 1. Киев, Будивельник, 1970, с. 47—54.
12. Городецкий А. С. Расчет пространственных конструкций методом конечного элемента. — В кн.: ЭВМ в исследовании и проектировании объектов строительства. Вып. 2. Киев, Будивельник, 1972, с. 75—87.
13. Городецкий А. С. Численная реализация метода конечных элементов. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып. 20. Киев, Будивельник, 1973, с. 31—42.
14. Городецкий А. С., Горбовец А. В., Павловский В. Э. Программа расчета пространственных стержневых систем «Экспресс-32». М., 1973. 52 с. (Вып. ЦНИПИАСС Госстроя СССР, № 1-156.)
15. Городецкий А. С. Программа «МИРАЖ» для статического расчета конструкций методом конечных элементов. — В кн.: Автоматизация проектирования как комплексная проблема совершенствования проектного дела в стране. М., 1973, с. 323—328. (Сб. трудов Всесоюзной научной конференции).
16. Городецкий А. С., Мойанский В. В. Построение матрицы жесткости для конечного элемента трехмерного континуума. — В кн.: Расчет пространственных конструкций. Вып. 3. Куйбышев, 1973, с. 108—119.
17. Городецкий А. С., Здорейко В. С. Расчет железобетонных балок-стенок с учетом образования трещин методом конечных элементов.

В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып. 27. Киев, Будивельник, 1975, с. 59—66.

18. Городецкий А. С., Здоренко В. С. Расчет железобетонных плит с учетом образования трещин методом конечных элементов. В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький, изд. Горьковского государственного университета, 1976, с. 48—52.

19. Вычислительный комплекс «СУПЕР-76» для прочностного расчета конструкций на ЭВМ «Минск-32»/А. С. Городецкий, А. В. Горбовец, В. С. Здоренко. Киев, изд. НИИАСС, 1977. 143 с.

20. Сходимость метода конечных элементов для задач нелинейной теории упругости/А. С. Городецкий, И. Д. Евзеров, В. С. Карпиловский. Киев, 1980. 9 с. (Деп. в УкрНИИТИ, № 2194).

21. Исследование методов решения систем уравнений, описывающих задачи нелинейной теории упругости/А. С. Городецкий, И. Д. Евзеров, В. С. Карпиловский. Киев, 1980. 47 с. (Деп. в УкрНИИТИ, № 2195).

22. Давыденко Д. О. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. — ДАН СССР, 1953, т. 83, № 4, с. 917—920.

23. Вычислительный комплекс «ЛИРА» для прочностного расчета строительных конструкций на ЕС ЭВМ/Е. П. Дуброва, А. И. Козачевский, А. С. Городецкий. — В кн.: Сб. докладов VIII Международного конгресса по применению математических методов в строительном производстве. Веймар, ГДР, 1978, с. 58—63.

24. Евзеров И. Д. Построение аппроксимирующих функций МКЭ на неравномерной сетке. Киев, 1979. 11 с. (Деп. в УкрНИИТИ, № 1466).

25. Евзеров И. Д. Оценки погрешности несовместных конечных элементов плиты. Киев, 1979. 9 с. (Деп. в УкрНИИТИ, № 1467).

26. Заворицкий В. И. О возможности использования МКЭ для оценки устойчивости грунтовых массивов. — В кн.: Расчет пространственных строительных конструкций. Вып. 4. Куйбышев, 1974, с. 173—179.

27. Заворицкий В. И. О некоторых вопросах численного моделирования задач механики грунтов в условиях гравитационного поля. — В кн.: Автомобильные дороги и дорожное строительство. Вып. 18. Киев, Будивельник, 1976, с. 96—101.

28. Заворицкий В. И. О дискретизации грунтовых массивов конечными элементами. — В кн.: Автомобильные дороги и дорожное строительство. Вып. 19. Будильник, 1976, с. 97—102.

29. Здоренко В. С. Расчет железобетонных континуальных конструкций с учетом образования трещин методом конечных элементов. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып. 29. Киев, Будивельник, 1976, с. 89—101.

30. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций на упругом основании с двумя коэффициентами постели/В. С. Здоренко, А. С. Городецкий, К. П. Елсукова, В. И. Сливкер. — В кн.: Сопротивление материалов и теории сооружения. Вып. 27. Киев, Будивельник, 1975, с. 180—192.

31. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975. 541 с.

32. Канторович Л. В., Акилов Т. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1977. 742 с.

33. Карпенко Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами. М., Стройиздат, 1976. 208 с.

34. Карпиловский В. С. Конструирование несовместных конечных элементов. Киев, 1980. 50 с. (Деп. в УкрНИИТИ, № 2153).

35. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1972. 496 с.

37. Королев А. Н., Крылов С. М. Способ расчета прогибов железобетонных плит, опертых по контуру, и безбалочных перекрытий при дей-

ствии кратковременной нагрузки. — В кн.: Исследование прочности, жесткости и трещиностойкости железобетонных конструкций. М., Госстройиздат, 1962, с. 85—141.

38. Кульчицкий О. Ю., Шимелевич Л. И. О нахождении начального приближения для метода Ньютона. — ЖВМ и МФ, 1974, т. 14, № 4, с. 1016—1018.

39. Лантух-Лященко А. И. Опытные данные о напряженном состоянии и несущей способности неразрезной железобетонной балки-стенки. — Тр. Таллинского политехнического института, 1965, серия А, 208, с. 111—117.

40. Лантух-Лященко А. И. Пространственный расчет железобетонных мостов в предельном состоянии. — В кн.: Автомобильные дороги и дорожное строительство. Вып. 26. Киев, Будивельник, 1975, с. 126—128.

41. Лаитух-Лященко А. И., Леонтьева В. Н., Страхова Н. Е. Программа пространственного расчета бездиафрагменного пролетного строения моста. — В кн.: Реф. информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах УССР. Вып. 9. Киев, Высшая школа, 1977, с. 45.

42. Марчук Г. И., Шайдуров В. В. Повышение точности решения разностных схем. М., Наука, 1979. 319 с.

43. Михлин С. Г. Вариационные методы математической физики. М., Наука, 1970. 512 с.

44. Михлин С. Г. О постоянных множителях в оценках погрешности вариационной сеточной аппроксимации. — В кн.: Записки научных семинаров. Т. 80, Л., 1978, с. 125—166.

45. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М., Мир, 1977. 383 с.

46. Одэн Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М., Мир, 1976. 464 с.

47. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М., Госстройиздат, 1954. 56 с.

48. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Особенности алгоритмизации метода перемещений при учете дополнительных связей. — В кн.: Метод конечных элементов и строительная механика. 1976, с. 28—36, (Тр. АПИ, вып. 349).

49. Постиов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л., Судостроение, 1974. 342 с.

50. Постиов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л., Судостроение, 1977. 280 с.

51. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений/В. А. Постиов, С. А. Дмитриев, Б. К. Елтышев, А. А. Радионов. Л., Судостроение, 1979. 287 с.

52. Потапкин А. А. Теория и расчет стальных и сталежелезобетонных мостов на прочность с учетом нелинейных и пластических деформаций. М., Транспорт, 1974. 192 с.

53. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек. — Прикладная механика, 1976, т. 12, № 11, с. 50—56.

54. Рассказов А. О. К теории колебаний многослойных ортотропных оболочек. — Прикладная механика, 1977, т. 13, № 8, с. 23—29.

55. Рассказов А. О. К теории многослойных пластин с ортотропными слоями. — В кн.: Сопrotивление материалов и теория сооружений. Вып. 30. Киев, Будивельник, 1977, с. 18—25.

56. Рассказов А. О., Титов В. Г. Расчет дорожной одежды как многослойной одномерной конструкции. — В кн.: Автомобильные дороги и дорожное строительство. Вып. 21, Киев, Будивельник, 1977, с. 25—28.

57. Рассказов А. О., Титов В. Г. К вопросу о рациональном конструировании слоев дорожной одежды. — В кн.: Автомобильные дороги и автомобильное строительство. Вып. 21, Киев, Будивельник, 1977, с. 28—31.

58. Рассказов А. О. Расчет многослойной ортотропной пологой оболочки методом конечных элементов. — Прикладная механика, 1978, т. 14, № 8, с. 51—56.

59. Расчет строительных конструкций с применением электронных машин. — В кн.: Сб. статей по материалам трех конференций, проведенных в США в 1958—1963 гг. Пер. с англ. Под ред. проф. А. Ф. Смирнова. М., Стройиздат, 1967. 400 с.

60. Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. В кн.: Сб. докладов Международного симпозиума в Люже в 1970 г. Пер. с англ. Под ред. проф. А. П. Филина. Л., Судостроение, 1974. 304 с.

61. Резников Р. А. Решение задач строительной механики на ЭЦВМ. М., Стройиздат, 1971. 311 с.

62. Розин Л. А. Метод конечных элементов. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Л., Энергия, 1971. 214 с.

63. Розин Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М., Стройиздат. 1977. 132 с.

64. Сегерлид Л. Применение метода конечных элементов. М., Мир, 1979. 392 с.

65. Семенец Л. В. Пространственные расчеты плитных мостов, Киев, Высшая школа, 1976. 162 с.

66. Синицын А. П. Метод конечных элементов в динамике сооружений. М., Стройиздат, 1978. 231 с.

67. Расчет сооружений с применением вычислительных машин/А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников. М., Госстройиздат, 1964. 380 с.

68. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Л., изд. ЛГУ, 1950. 255 с.

69. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М., Мир, 1977. 349 с.

71. Пространственные расчеты мостов/Б. Е. Улицкий, А. А. Потапкин, В. И. Руденко, И. Д. Сахарова, Ю. М. Егорушкин. М., Транспорт, 1967. 404 с.

72. Ухов С. Б. Расчет сооружений и оснований методом конечных элементов. М., Госстройиздат, 1973. 118 с.

73. Ухов С. Б. Скальные основания гидротехнических сооружений. М., Энергия, 1975. 263 с.

74. Феодосьев В. И. Применение шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня. — Прикладная механика и математика, 1963, № 2, с. 265—274.

75. Цурков И. С. К вопросу о построении теории равновесия нелинейно упругих тел. — В кн.: Строительная механика. М., 1969, с. 181—193. (К 80-летию И. М. Рабиновича).

76. Шапошников Н. Н. Расчет пластинок на изгиб по методу конечного элемента. — Тр. МИИТ, 1968, вып. 260, с. 135—147.

77. Шапошников Н. Н. Решение плоской задачи теории упругости при помощи дискретной задачи. — Тр. МИИТ, 1968, вып. 274, с. 186—201.

78. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I Comm. Pure Appl. Math. 12, N 4, 1959. p. 623—727, II Comm. Pure, Appl. Math. 17, p. 35—92.

79. Ateeja M. Evaluation de d'erreur dans le methobo des elements finis, Numer. Math., 28, 1977, N 3, p. 295—306.

80. Clough R. W. The finite element method in plane stress analysis. Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation. Pittsburg. Pa. Sept., 1960, p. 41—46.
81. Clough R. W. The finite element method in structural mechanics, chapter 7 of Stress Analysis Wiley, 1965, p. 181—206.
82. Lahage E. Une methode de resolution d'une categorie d'equations transcendantes. C. R., 1934, v. 198, p. 1840—1842.
83. Miyoshi T., Convergence of finite element solution represented by a non-conforming basis, Kumamoto Journal of Sciences (Math.), 9, N 1, p. 11—20.
84. Ortega J. M., Rheinboldt W. C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Academic Press, New York and London, 1970, 680 p.
85. Przemieniecki J. S. Theory of Matrix Structural Analysis, N. Y. Mc-Graw-Hill Book Company, 1968, 362 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Современная характеристика метода конечных элементов . . .	5
1.1. Основные положения	5
1.2. Выбор координатных функций	8
1.3. Исследование конечных элементов	13
1.4. Сравнение различных типов конечных элементов	23
1.5. Связь с методами строительной механики стержневых систем	25
Глава 2. Применение МКЭ для решения задач линейной теории упругости	28
2.1. Схема решения задач	28
2.2. Стержневые системы	29
2.3. Пластинчатые системы (плоское напряженное состояние)	32
2.4. Тонкие изгибаемые плиты	35
2.5. Оболочечные системы	43
2.6. Конструкции на упругом основании	48
2.7. Массивные конструкции (трехмерное напряженное состояние)	57
2.8. Многослойные конструкции	63
Глава 3. Применение МКЭ для решения задач нелинейной теории упругости	65
3.1. Вариационная постановка задачи. Сходимость МКЭ	65
3.2. Построение нелинейных разрешающих уравнений МКЭ	69
3.3. Решение систем нелинейных уравнений	72
3.4. Расчет железобетонных конструкций с учетом нелинейных свойств материала	87
Глава 4. Численная реализация МКЭ	95
4.1. Основные вопросы алгоритмизации МКЭ и его реализации на современных ЭВМ	95
4.2. Построение матриц жесткости	97
4.3. Составление канонических уравнений МКЭ	99
4.4. Решение систем уравнений высоких порядков	101
4.5. Определение компонентов напряженно-деформированного состояния КЭ	105
4.6. Реализация различных граничных условий	106
4.7. Применение суперэлементов для расчета сложных систем	108
4.8. Алгоритмизация расчета нелинейных систем	110
4.9. Реализация на электронных вычислительных машинах	113
Глава 5. Примеры расчета транспортных сооружений	124
5.1. Примеры численного исследования мостовых конструкций	124
5.2. Расчеты многослойных конструкций	129
5.3. Примеры оценки напряженно-деформированного состояния грунтовых массивов	130
Список литературы	138

Александр Сергеевич Городецкий.
Виктор Иосифович Зоворицкий.
Александр Олегович Рассказов.
Альберт Иванович Лантух-Лященко.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
В ПРОЕКТИРОВАНИИ ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Редактор Е. С. Голубкова
Обложка художника Н. Н. Аннушина
Технический редактор Л. Е. Шмелева
Корректор Т. И. Маляренко

ИБ № 2071

Сдано в набор 09.03.81. Подписано в печать 22.12.81. Т-29670. Формат 60×90¹/₁₆.
Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 9 Усл. кр.-отт. 9,38.
Уч.-изд. л. 9,49. Тираж 2 170 экз. Заказ 1866. Цена 50 коп. Изд. № 1—3—1/15 № 0689
Издательство «ТРАНСПОРТ», 107174, Москва, Басманный туп., 6а

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Хохловский пер., 7.

625
М54

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ в проектировании транспортных сооружений

Издательство
«Транспорт»

**Книги в формате djvu схожей тематики
доступные в Internet**

Объем Кб	Автор	Название	Год	Стр
2843	Belytschko T	Nonlinear Finite Design	1998	
1772	Saouma V E	Finite element Framed structures	2002	304
2549	Зенкевич О. Морган К	Конечные элементы и аппроксимация. Пер. с англ. – М. Мир. 1986 – 318с	1986	318
1432	Агалов В. П.	Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций	2000	152
1415	Розин Л. А.	Стержневые системы как системы конечных элементов	1975	232
4268	Smith I. M. Griffiths D. V.	Programming The Finite Element Method	1988	478
	Норри Д. Фриз де Ж.	Введение в метод конечных элементов – М. Издательство «Мир»	1981	304
3353	Галлагер Р.	Метод конечных элементов. Основы.	1984	428
4213	Зенкевич О.	Метод конечных элементов в технике – М. Мир.	1975 – 1975	542
1031	Taylor R. L.	FEAP: A Finite Element Analysis Program. Theory Manual	2003	159
8554	Moaveni Saeed	Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS, 1999	1999	527
4252	Hutton D. V.	Fundamentals of Finite Element Analysis	2004	499
1593	Flaherty J. E.	Finite Element Analysis: Lectures Notes	2000	302
4311	Felippa C. A.	Introduction to Finite Element Methods (IFEM)	2003	
3343		Nonlinear Finite Element Methods (NFEM)	2003	
1300	Баженов В. А.	Строительная механика. Специальный курс	2001	288
	Оробей В. Ф.	Применение метода граничных элементов.		
4396	Бреббия К.	Методы граничных элементов	1987	524
2575	Yijun Liu	Lecture Notes: Introduction to the Finite Element Method	2003	188